

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«Харківський політехнічний інститут»

Г.О. Аніщенко, О.К. Морачковський

**КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ**  
**ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

Навчально-методичний посібник  
для студентів бакалаврського напрямку 6.050503 - «Машинобудування»  
факультету «Інтегрованих технологій та хімічної техніки»

Затверджено  
редакційно-  
видавничою  
радою університету,  
протокол № 2 від  
12.12.2013р.

Харків  
НТУ «ХПІ»  
2014

УДК 539.3

ББК 22.37

А 76

Рецензенти:

*К. В. Аврамов*, д-р техн. наук, професор, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України

*Г.І. Львов*, завідувач кафедри динаміки та міцності машин, д-р техн. наук, професор, Національний технічний університет «ХПІ»

**Аніщенко Г.О.**

А 76      Комп'ютерний практикум. Лабораторні роботи з теоретичної механіки  
[Текст] : навч-метод. посібник / Г.О. Аніщенко, О.К. Морачковський.

– Х : НТУ «ХПІ», 2014. – 80 с.

ISBN

Комп'ютерний практикум з теоретичної механіки містить теоретичні положення, завдання до комп'ютерних лабораторних робіт, які можна виконати на ПЕОМ самостійно у виші або вдома.

Посібник може бути корисним викладачам, аспірантам і студентам університетів та особам, які займаються комп'ютерним моделюванням і розв'язанням обчислювальних задач.

Лл. 89. Бібліогр.: 5 найм.ББК 22.37

УДК 539.3

ББК 22.37

ISBN

©      Аніщенко Г.О.,  
Морачковський О.К., 2014 р  
© НТУ «ХПІ», 2014 р.

## ВСТУП

Навчальний посібник присвячено викладенню комп'ютерного лабораторного практикуму з теоретичної механіки, заснованому на сучасних інформаційних технологіях та створеному на кафедрі теоретичної механіки Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Сучасна освіта припускає проведення практичних та лабораторних занять із застосуванням комп'ютерних та Інтернет – технологій, поширення набувають сучасні електронні конспекти лекцій, електронні версії методичних вказівок, мультимедійні продукти (віртуальні лабораторні роботи, лекційні демонстрації тощо), спеціалізовані бази даних та комп'ютерні лабораторні практикуми. Завданням таких розробок є надання допомоги студенту і викладачу в тому, щоб з мінімальними витратами на освоєння інформаційних технологій переконатися в повноцінності отриманих знань. Найбільшою привабливістю володіють програмні продукти, що містять текстовий, математичний і графічний процесори.

У першій частині посібника наводяться загальні відомості про програмний комплекс (ПК) «КіДиМ» для комп'ютерного аналізу статистики, кінематики та динаміки машин і механізмів, представлено комп'ютерний практикум, лабораторні роботи якого можна виконати самостійно у виші або вдома. Розробником ПК є доктор технічних наук, професор Андрєєв Ю.М.

Друга та третя частини посібника призначені теоретичним положенням і комп'ютерним лабораторним роботам, відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Теоретична механіка» для двох модулів: Модуль 1 «Кінематика та статика» та Модуль 2 «Динаміка» для студентів бакалаврського напрямку 6.050503 – «Машинобудування» факультету «Інтегрованих технологій та хімічної техніки» НТУ «ХПІ». Посібник може бути корисним викладачам, аспірантам і студентам природничих факультетів університетів та особам, що займаються комп'ютерним моделюванням і вирішенням об'ємних обчислювальних завдань.

Автори вдячні професорам, д-ру технічних наук Аврамову Костянтину Віталійовичу та д-ру технічних наук Львову Геннадію Івановичу - рецензентам посібника.

Серпень 2013 року.

## 1. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОГРАМНОГО КОМПЛЕКСУ «КіДиМ»

Назву програмного комплексу (ПК) «КіДиМ» складено з трьох слів: «*кінематика*», «*динаміка*» та «*машина*» або «*механізм*». Комплекс призначено для проведення розрахунків за аналізом статичної, кінематики та динаміки матеріальних точок та систем твердих тіл. ПК «КіДиМ» створювався на кафедрі теоретичної механіки Харківського політехнічного інституту на початку 80-х років XX сторіччя. З 1996 року учбову версію впроваджено в учбовий процес курсів теоретичної та аналітичної механіки. У 2001 році був створений «Практикум з теоретичної механіки на базі системи комп'ютерної алгебри», який розміщено за адресою: <http://dl.kpi.kharkov.ua/techn/tu16/default.asp?rus>.

ПК «КіДиМ» функціонує у 32-х бітній (64 – бітній) операційній системі WINDOWS як повноцінна WINDOWS-програма з сучасним інтерфейсом. Підготовка вихідних даних, які розташовані у текстових файлах із ASCII (DOS) кодуванням (866 - таблиця), їх редагування, перегляд результатів розрахунків, друкування проводять у спеціальному редакторі КіДиМ. Мова реалізації - C++, середовище розробки - BORLAND BILDER C++ 6.0. ПК КіДиМ застосовує вбудовану до неї систему комп'ютерної алгебри (СКА). Це надає можливість:

- уніфікувати підготовку вихідних даних та автоматизувати побудову математичної моделі процесів кінематики, статичної рівноваги або динаміки механічних систем для різних видів розрахунків;
- використовувати спрощену мову вводу та редагування аналітичної та чисельної вхідної інформації;
- організовувати діагностику вихідних даних;
- здійснення пошуку помилок при громіздких аналітичних перетвореннях.

**Підготовка вихідних даних** проводиться в залежності від виду завдань: статика, кінематика, динаміка та ін. Розрахунки відбуваються у програмних модулях, які викликаються оболонкою програмного комплексу у відповідності із видом розрахунку. Вихідні дані за-

писуються в аналітичному вигляді з використанням допоміжних рисунків та являють собою опис механічної моделі процесу, що розраховується. Робочими мовами ПК КіДиМ є російська, українська та англійська. Основні елементи інтерфейсу користувача ПК КіДиМ містять: **головне меню, панель інструментів, закладки відкриття файлів**. Зовнішній вигляд екрану залежить від обраного у режимі «Настройка» браузера: а) - HTML-файли за внутрішнім та б) - інстальованим браузером в системі користувача. У першому випадку файли звіту та діагностики відкриваються за допомогою закладок, у другому – за допомогою пунктів головного меню.

**Головне меню програми та закладки файлів** містять наступні режими роботи:

«**Файл**» – стандартний режим для WINDOWS-програм, який застосовують для створення нових, відкриття існуючих, збереження редагованих файлів вихідних даних, друку текстових файлів, виходу з програми;

«**Расчет**» – викликає програму для розрахунків;

«**Настройка**» – обирає шрифт, мову, браузер для перегляду html-файлів діагностики, звіту та показу графіків, які ілюструють розрахунки; «**Исходник**» – підготовлює та редагує файл вихідних даних; «**Диагностика**» – переглядає та друкує діагностичні повідомлення щодо розрахунків, які проводяться; «**Отчет**» – переглядає та друкує звіт, сформований при проведенні розрахунку; «**Другие**» – відкриває будь-які інші текстові файли з метою перегляду, копіювання з них інформації й таке інше.

**Кнопки інструментальної панелі** передбачені для виклику вже названих вище та деяких додаткових функцій при роботі ПК КіДиМ, назви яких впливають при наближенні до них указника комп'ютерної миші.

**Діагностика** – це повідомлення із вказівкою помилок. Якщо помилок немає, то з'явиться розрахункове віконце, у котрому можна подивитись результати розрахунку.

Для забезпечення зручності роботи існують певні настройки у

вікні редактора та у вікні розрахункових модулів, котрі можна змінити у режимі головного меню «Настройка». Склад настройок поділено на наступні – для редактора та для розрахункових модулів. У першому випадку можна обрати шрифт набору даних, мову меню та повідомлень, закрити або відкрити рисунки, які ілюструють вихідні дані, обрати браузер («Встроенный» або інсталюваний у системі користувача).

У другому випадку можна назначити:

- кольори основних елементів графіку (передбачена можливість кольорового друку та виводу до файлу кольорового образу графіка, відображення перспективи при показі тривимірних графіків);

- кількість точок графіків при табулюванні;
- тип та розмір шрифту на графіках;
- товщину пера при відображенні графіків;
- тривалість анімації у *м/сек* та у *сек*;
- кількість кадрів в одній секунді при відображенні анімації;
- процент стиску графіка при збереженні його в BMP-файлі;
- відносну точність, наприклад, при чисельному інтегруванні

рівнянь динаміки;

- границю відношення масштабів по осях графіків, коли вони рівняються (щоб, наприклад, коло відображалось колом, а не еліпсом);

- наявність шлейфу при виводі рухомих об'єктів анімації;

- розташовування закладки з найменуванням графіків в один чи декілька рядків (для збільшення місця для графіка);

- необхідність показу таблиці характерних значень графіку;

- необхідність показу значень сітки графіка ще праворуч та зверху;

- друкування;

- користування результатами попередніх розрахунків при незначних редагуваннях файлу вихідних даних, що не змінюють механічну модель процесу та економить час;

- написання кадрів анімації в BMP та (або) в JPEG-файл та інше.

**Основні конструкції вхідної мови ПК КіДиМ.** Файл вихідних даних ПК КіДиМ являє собою звичайний **ASCII файл** (текстовий файл), який може бути підготовлений будь-яким текстовим редактором. Зручніше робити це вбудованим редактором у ПК КіДиМ.

**Назва** файлу вихідних даних може бути будь-якою, а його розширення повинно бути **«.kdm»**. Інформація у файлі надається набором конструкцій мови ПК КіДиМ: **«Інструкція»**, **«Формула»**, **«Елемент»**, **«Оператор»**, **«Масив»**, кожна з яких закінчується символом **‘;’**. Між тим інструкції виду розрахунку **«РАСЧЕТ := <вид розрахунку>;»** повинна закінчувати блок інформації, яка відноситься для цього розрахунку, а інструкції **«КОНЕЦ;»** повинна закінчувати інформацію у файлі. **«Коментар»** - текст, що розміщують між знаками **‘#’**.

**Константа** – цифровий запис числа (можливо із урахуванням знаку). Розділення цілої та дробової частин можливо у звичайному або експоненціальному представленні, наприклад: 5, 11.34, 2.71E-02, 3.45e+3.

**Число « $\pi$ »** позначається у вихідних даних латинськими літерами – **PI** або **pi**.

**Змінна** – розпочинається із літери, **t** – використовується як час. Приклад: **fi, Phi, alpha, beta4**.

**Знаки математичних операцій** – це символічні позначення: **«+»** – «додавання», **«-»** – «віднімання», **«\*»** – «добуток», **«/»** – «ділення», **«^»** – «піднесення до степеня», **«'»** – «диференціювання».

**Елементарні функції** записуються малими літерами, зазвичай – спочатку ім'я, потім у круглих дужках аргумент – змінна або деякий математичний вираз. Стандартними є функції: **abs()** – «абсолютне значення числа», **sqrt()** – «корінь квадратний», **rand()** – «випадковий вибір числа», тригонометричні та гіперболічні функції, **arsh()** – «арксинус», функції - **sin()**, **sh()** – «синус», **cos()**, **ch()** – «косинус», **tg()** – «тангенс», **arcsin()** – «арксинус», **arctg()** – «арктангенс», **exp()** – «експонента», **ln()** – «натуральний логарифм».

**Математичний вираз** – константа, змінна або сукупність констант та (або) змінних, які розділені знаками математичних опера-

цій та (або) елементарних функцій.

**Списки:** списком називають запис послідовності констант або змінних, розділених комами.

**Інструкція** – це літерові конструкції, що розпочинаються із назви, яка написана великими літерами, після котрих стоїть знак ‘;’ («Крапка з комою») або знак ‘:=’ («Двокрапка, знак рівності» із подальшим списком (простим або складеним).

Інструкції призначені для введення у комп’ютер текстової та числової інформації, необхідної для проведення розрахунків, оформлення результатів у табличному, текстовому та графічному вигляді із візуалізацією на екрані монітора та друком на принтері. Приклади:

ВАРЬИРОВАТЬ: = t, tнач, tкон;

ВАРЬИРОВАТЬ ПАРАМЕТРЫ: = a(1, 10, 1), b(2, 6, 2);

ДИАПАЗОН ОБОРОТОВ: = 400, 1000, 10;

ПЕЧАТАТЬ: = Fi10, J.Psi5;

РАСЧЕТ = СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ;

КОНЕЦ;

**Формула** – це конструкція, яка розпочинається із змінної, після котрої стоїть знак ‘=’ («Рівність»), а потім записаний математичний вираз. Формули у файлі вихідних даних вводять так само, як у мовах високого рівня типу C++, Pascal і т.п., тобто в строку. Формули слугують для введення у комп’ютер різної аналітичної інформації. Усі вони у вихідних даних повинні бути розв’язані відносно змінних та представлені у такому вигляді: у лівій частині стоїть лише змінна, у правій – математичний вираз. Приклади:  $A = \sin(x)$ ;  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ;  $v_x = x't$ ;

**Елемент** – це конструкція, яка розпочинається зі змінної, після котрої стоїть знак ‘.’ («Крапка»), потім – інша змінна, після неї знак ‘=’ («Рівність»), а справа від нього – математичний вираз. Першу змінну називають ім’ям елемента, другу його координатою, праву частину – характеристикою (значенням) елемента. Приклади: силовий елемент –  $P.x11 = Q*\sin(\omega*t)$ ; інерційний елемент –  $J.Fi4 = m4*r4^2/2$ ; пружний елемент –  $C.d1 = 1e8$ ; дисипативний елемент –  $D.d1 = \beta 2$ ;



**Інструкції «Побудова графіків».** Для виводу числової інформації у вигляді графіків у файлі вихідних даних використовують інструкції «ПЕЧАТАТЬ» («ПОКАЗАТЬ»), «СРАВНИТЬ», «СОВМЕСТИТЬ», де перелічують змінні, які мають бути показані на графіках як функції часу. Якщо в інструкції «ПЕЧАТАТЬ» («ПОКАЗАТЬ») вказано одну змінну як функцію іншої, то графік має по осі ординат значення першої змінної, а по осі абсцис – значення другої. Інструкції «СРАВНИТЬ» та «СОВМЕСТИТЬ» дозволяють вивести на одному графіку декілька змінних у однаковому масштабі. Інструкція: «СРАВНИТЬ:=  $re(fi2, fi3, fi4);$ » - дозволяє побудувати графіки змінних  $fi2, fi3, fi4$  у залежності від часу.

Результати можуть бути включені у звіти та збережені у файлах для подальшого використання в розрахунках та документах.

#### **Питання для самоконтролю**

1. Для чого створюють системи комп'ютерної алгебри?
2. Як розшифрувати назву програмного комплексу КіДиМ?
3. Які особливості програмного комплексу КіДиМ?
4. У якій операційній системі функціонує програмний комплекс КіДиМ?
6. На яких мовах програмування реалізована система аналітичних обчислень у програмному комплексі КіДиМ?
7. Яким редактором представляють і як записують розширення в імені файлу вихідних даних програмного комплексу КіДиМ?
8. Що означають синтаксичні конструкції програмного комплексу КіДиМ: РОБОТА :=, ВИКОНАВ :=, ВАРІЮВАТИ :=, ДРУКУВАТИ :=, РОЗРАХУНОК := СТАТИКА, КІНЕЦЬ ?
9. Чи обов'язково починати текст файлу вихідних даних програмного комплексу КіДиМ з інструкцій: РОБОТА: = №...(тема); ВИКОНАВ: = (ім'я та прізвище) і закінчувати його інструкцією?

## 2. КІНЕМАТИКА ТА СТАТИКА

### 2.1 Кінематика точки. Теоретичний матеріал

Задати рух точки – це означає вказати такі функціональні залежності, які однозначно вказували б положення точки у просторі в довільний момент часу. Закон руху точки зазвичай задають за допомогою координатного способу.

**Координатний спосіб завдання руху.** За цим способом вводять систему координат, яка визначається початком координат та базисними векторами.

На рис. 2.1. надано декартову систему координат з початком в точці  $O$  та взаємно ортогональними осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , відповідно до напрямку ортів  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Радіус-вектор  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  положення точки  $M$ , яка рухається відносно нерухомої декартової системи координат  $Oxyz$ , визначається залежностями від часу  $t$  її координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ ;  $z = z(t)$ .

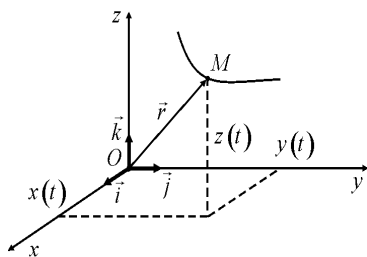


Рисунок 2.1

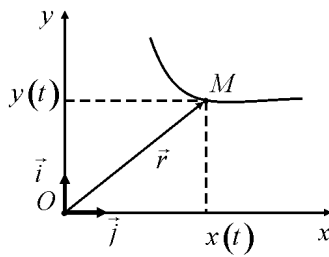


Рисунок 2.2

У разі руху точки в площині, як показано на рис. 2.2, радіус-вектор  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$  положення точки  $M$ , яка рухається відносно нерухомої декартової системи координат  $Oxy$ , визначається залежностями від часу  $t$  координат  $x$ ,  $y$ :  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ . Функціональні залежності координат від часу називають законом руху точки в координатній формі.

**Кінематичні характеристики точки** – це траєкторія, вектори швидкості й пришвидшення точки, що рухається.

Вектор швидкості точки характеризує зміну її положення у часі:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Вектор швидкості точки завжди співпадає з напрямом її руху вздовж дотичної до траєкторії, як показано на рис. 2.3.

Проекції вектора швидкості точки

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$
 та значення її моду-

ля визначаються за формулами:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Вектор пришвидшення точки характеризує зміну вектора швидкості у часі:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Вектор пришвидшення точки є завжди розташованим в області угнутості траєкторії, як показано на рис. 2.4 та рис.2.5.

Проекції вектора пришвидшення точ-

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$
 та значення його

модуля визначаються так:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

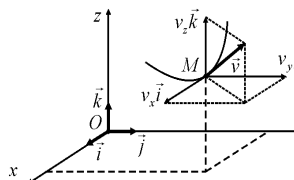


Рисунок 2.3

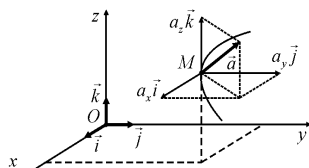


Рисунок 2.4

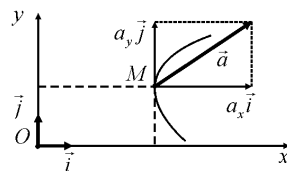


Рисунок 2.5

**Натуральний спосіб завдання руху точки.** За цим способом вважається, що точка рухається по заданій кривій, а тому траєкторія руху точки є відомою.

При натуральному способі, як показано на рис. 2.6, на траєкторії вводять нерухому точку  $O$  – початок відліку руху та рухомі разом з точкою базисні орти  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ , які спрямовані вдовж дотичної та нормалі до дотичної в області угнутості траєкторії. Положення точки  $M$  на траєкторії однозначно визначається залежністю дугової координати  $S = OM$  від часу:  $s = s(t)$ . Цю функціональну залежність називають *законом руху точки по траєкторії*. Вектор швидкості точки характеризує зміну її положення у часі:  $\vec{v} = v_{\tau} \vec{\tau} = \dot{s} \vec{\tau}$ . Як показано на рис. 2.6, скалярна величина  $\dot{s} = v_{\tau}$  є проекцією вектора швидкості точки на дотичну до траєкторії й називається **алгебраїчною швидкістю точки**.

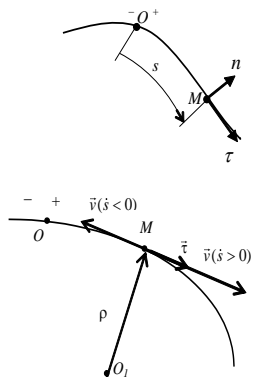


Рисунок 2.6

Знак алгебраїчної швидкості визначає напрям руху точки. На цьому ж рисунку точка  $O_1$  визначає центр кривизни траєкторії, а  $\rho$  – радіус кривизни у точці  $M$ . Вектор швидкості точки завжди співпадає з напрямом її руху вздовж дотичної до траєкторії (рис. 2.6).

Вектор пришвидшення точки  $\vec{a} = a_{\tau} \vec{\tau} + a_n \vec{n}$  є векторною сумою векторів дотичного та нормального пришвидшень, як показано на рис. 2.7 для просторової системи координат та на рис. 2.8 для руху точки у площині:

$$\vec{a}_{\tau} = \dot{s} \vec{\tau} = \dot{v}_{\tau} \vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n} = \frac{v_{\tau}^2}{\rho} \vec{n}, \quad \vec{a} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n.$$

Вектор повного пришвидшення точки лежить в стичній площині й розташований в області угнутості траєкторії, як показано на рис. 2.7 та рис. 2.8.

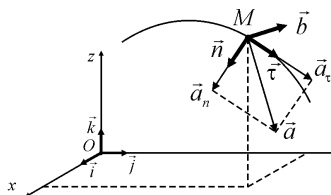


Рисунок 2.7

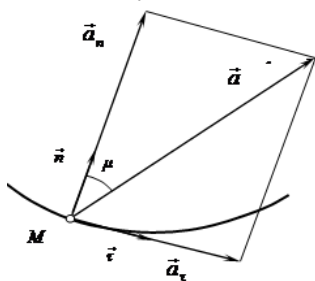


Рисунок 2.8

Модуль вектора пришвидшення точ-

ки визначається так:  $|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_\tau|^2 + |\vec{a}_n|^2}$ .

Формули перерахунку дотичного та нормального векторів пришвидшення по чисельним даним проєкцій векторів швидкості й пришвидшення на декартові осі є наступними:

$$a_\tau = \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{v}; a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},$$

де  $v$ ,  $a$  – модулі векторів швидкості та пришвидшення точки.

**Радіус кривизни траєкторії** в деякій точці траєкторії можна визначити так:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

### Питання для самоконтролю

1. Як задати закони руху точки в декартових координатах ?
2. Як задати закони руху точки в натуральних координатах ?
3. Як визначити рівняння траєкторії в декартових і натуральних координатах?
4. За якими формулами визначається швидкість та пришвидшення точки, якщо рух точки задано в декартових координатах ?
5. За якими формулами визначається швидкість та пришвидшення точки, якщо рух точки задано в натуральних координатах ?
6. Як визначаються проєкції на дотичну та нормаль к траєкторії прискорення точки, рух якої задано натуральним способом?
7. Що таке кривизна траєкторії руху точки і як її визначити, якщо закон руху у площині задано в декартових координатах?
8. Чим відрізняються плоскі та просторові криві ?
9. Що означає інваріантність векторів швидкості та пришвидшення?

## 2.2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

### Комп'ютерне та аналітичне моделювання кінематики руху точки

**Ціль роботи** – визначення кінематичних характеристик: траєкторії, швидкості й пришвидшення точки, що рухається у площині, за заданими залежностями від часу та вивчення закономірностей руху точки.

**Об'єктом** досліджень є точка, що рухається у площині.

**Предметом** досліджень є властивості траєкторії, векторів швидкості й пришвидшення рухомої точки та незалежність кінематичних характеристик від способу завдання закону руху точки.

**Методи** досліджень містять аналітичне та комп'ютерне моделювання.

#### Комп'ютерне моделювання кінематики точки

**Перший закон руху точки.** Розглянемо рух точки у площині, який задано законом у координатній формі:

$$x = 4 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 6, \quad y = -2 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 4, \text{ (см).}$$

Декатові координати є гармонійно змінювані у часі функції з круговою частотою  $\omega = \frac{\pi}{2}$  (рад/с), звідки знайдемо період зміни координат у часі:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4 \text{ (с).}$$

За заданими залежностями координат точки від часу визначимо кінематичні характеристики: траєкторію, швидкість й пришвидшення точки, та вивчимо закономірності її руху для заданого проміжку часу  $t \in [0, T_k]$ ,  $T_k = nT$ , де  $n$  – кількість періодів за час, який розглядається. Скориставшись формулами переходу від декартових до натуральних (природних) координат обчислимо дотичні й нормальні складові пришвидшення точки, а також радіус кривизни її траєкторії.

**Другий закон руху точки.** Розглянемо рух точки у площині, який на відміну від попереднього задано у координатній формі іншим законом:

$$x = t^2 + 2, \quad y = -5t, \quad (\text{см}).$$

За заданими залежностями координат точки від часу визначимо її кінематичні характеристики та вивчимо закономірності її руху для заданого проміжку часу  $t \in [0, T_k]$ , де  $T_k = y_k / 5$ , що визначаємо шляхом завдання значення за модулем координати  $y = |y(T_k)|$  наприкінці руху точки. Скориставшись формулами переходу від декартових до натуральних (природних) координат обчислимо дотичні й нормальні складові пришвидшення точки, а також радіус кривизни траєкторії.

**Дослідимо незалежність кінематичних характеристик від способу завдання закону руху точки.** Розглянемо натуральний та декартовий закон руху точки по колу, радіус якого  $R = 10$  см (рис. 2.9).

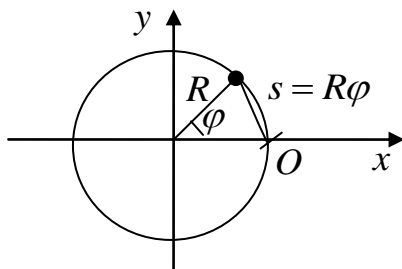


Рисунок 2.9

Натуральний закон руху точки:

$$s = R \varphi(t),$$

де  $\varphi(t) = \omega t$ ;  $\omega = \pi / 2$ .

Декартовий закон руху в цьому випадку отримує вигляд:

$$x = R \cos\left(\frac{s}{R}\right) = R \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right);$$

$$y = R \sin\left(\frac{s}{R}\right) = R \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right).$$

Для точки, що рухається у площині за заданими законами, визначимо кінематичні характеристики: траєкторію, швидкість й пришвидшення точки, та вивчимо закономірності її руху для заданого проміжку часу  $t \in [0, T_k]$ ,  $T_k = nT$ , де  $T = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 4$  (с) - період циклічного руху точки по колу,  $n$  - кількість періодів руху за час, що розглядається.

Розглянемо вихідний файл, зміст якого надано нижче.

### Інструкції та розрахункові залежності

РАБОТА := №1.1 - **Перший закон руху**;  
ВЫПОЛНИЛ:=ст. Сидоров гр. ИТ-10а;  
 $x=4*\sin(\omega*t)+6$ ;  $y=-2*\cos(\omega*t)+4$ ;  
 $\omega=\pi/2$ ;  
 $v_x=x't$ ;  $v_y=y't$ ;  $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ ;  
 $a_x=v_x't$ ;  $a_y=v_y't$ ;  $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$ ;  
 $a_{\tau}=(v_x*a_x+v_y*a_y)/v$ ;  $a_n=\sqrt{a^2-a_{\tau}^2}$ ;  
 $a_1=\sqrt{a_{\tau}^2+a_n^2}$ ;  
 $g_0=v^2/a_n$ ;  
 $T=2*\pi/\omega$ ;  $n=1$ ;  $T_k=n*T$ ;  
ВАРЬИРОВАТЬ:= $t, 0, T_k$ ;  
ПОКАЗАТЬ:= $y(x), v_x, v_y, v, g_0$ ;  
СРАВНИТЬ:=траектория ( $y(x)$ ), кривизна ( $g_0$ ),  
швидкість\_проекції ( $v, v_x, v_y$ ), пришвидшення\_проекції ( $a, a_x, a_y$ ), пришвидшення\_перераховані ( $a, a_1$ );  
РАСЧЕТ:=КИНЕМАТИКА;  
РАБОТА:= №1.2 - **Другий закон руху**;  
 $x=t^2+2$ ;  $y=-5*t$ ;  $T_k=y_k/5$ ;  $y_k=40$ ;  
РАСЧЕТ:=КИНЕМАТИКА;  
РАБОТА:= №1.3 - **Незалежність кінематичних характеристик від способу завдання руху**;  
 $R=10$ ;  $FI=\omega*t$ ;  $S=R*FI$ ;  
 $x=R*\cos(S/R)$ ;  $y=R*\sin(S/R)$ ;  
 $v_{\tau}=S't$ ;  $vt=abs(S't)$ ;  $g_0=v_{\tau}^2/a_n$ ;  
 $a_{\tau}=S't't$ ;  $a_n=v_{\tau}^2/R$ ;  
 $aE=\sqrt{a_{\tau}^2+a_n^2}$ ;  
 $T=2*\pi/5 \omega$ ;  $T_k=2*T$ ;  
ВАРЬИРОВАТЬ:= $t, 0, T_k$ ;  
ПОКАЗАТЬ:= $S, v_{\tau}, a_{\tau}, a_n, a$ ;  
СРАВНИТЬ:=закони\_руху ( $S, x, y$ ), траекторію( $y(x)$ ), швидкість ( $v_{\tau}, v$ ), тангенц\_нормаль\_повне\_пришв ( $a_{\tau}, a_n, aE$ ), ускорение ( $a, aE$ );  
РАСЧЕТ:=КИНЕМАТИКА;  
КОНЕЦ;

### Коментарі

Лабораторна робота №1. Перший закон руху точки у декартових координатах:  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ .

Визначення: проєкцій і модулів векторів швидкості та пришвидшення точки; проєкцій пришвидшення точки на дотичну та нормаль до траєкторії; модуля вектора пришвидшення точки за його проєкціями на дотичну та нормаль до траєкторії;

Інструкції : Варіювати у часі  $t \in [0, T_k]$

Графіки кінематичних характеристик руху точки

Другий закон руху точки у декартових координатах

Дослідження незалежності кінематичних характеристик від способу завдання законів руху  
Завдання: натурального та декартового законів руху.

Визначення:

- алгебраїчної швидкості точки та її модуля, а також радіусу кривизни траєкторії;

Інструкції: Варіювати у часі  $t \in [0, T_k]$

Показ графіків кінематичних характеристик руху



### 2.3. Кінематика тіл та системи тіл. Теоретичний матеріал

**Найпростіші рухи** твердого тіла – це поступальний рух та обертальний рух навколо нерухомої осі.

**При поступальному русі твердого тіла** траєкторії усіх його точок тіла конгруентні, а в кожний момент часу швидкості та прискорення усіх точок тіла однакові. Кінематичні характеристики точок тіла при поступальному русі можна визначити, вивчивши рух тільки однієї його точки.

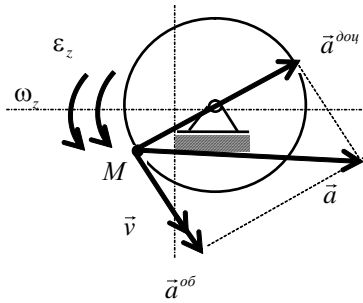


Рисунок 2.10

**При обертанні тіла навколо нерухомої осі** точки осі обертання залишаються нерухомими, як показано на рис. 2.10. Основними кінематичними характеристиками обертання абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі є кут повороту  $\varphi$ , вектори кутової швидкості та кутового пришвидшення:

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \vec{k},$$

де проекції цих векторів є відомими якщо задано кут повороту  $\varphi = \varphi(t)$ :

$$\omega_z = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon_z = \ddot{\varphi}.$$

Модулі швидкості –  $v$ , обертального –  $\vec{a}^{o6}$ , доцентрового –  $\vec{a}^{o6}$  та повного –  $\vec{a}$  пришвидшень точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, визначають так:

$$v = |\vec{v}| = \omega R; \quad |\vec{a}^{o6}| = \varepsilon R; \quad |\vec{a}^{o6}| = \omega^2 R;$$

$$\vec{a} = \vec{a}^{o6} + \vec{a}^{o6}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}^{o6}|^2 + |\vec{a}^{o6}|^2}; \quad a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

де  $\omega = |\omega_z|$ ,  $\varepsilon = |\varepsilon_z|$ ,  $R$  – відстань від точки до осі обертання.

**Плоско-паралельним (плоским) рухом** абсолютно твердого тіла називають рух, при якому його точки рухаються у площинах, паралельних деякій нерухомій базовій площині. Вивчення плоско-паралельного руху можна звести до вивчення руху плоскої фігури в її

площині або відрізка прямої цієї фігури. Як показано на рис. 2.11 а, 2.11 б, положення фігури в даний момент часу визначають координатами її довільної точки  $A$ , яка обрана в якості **полюса**, а також кутом  $\varphi$  повороту фігури навколо цього полюса:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Ці рівняння задають рух плоскої фігури. Перші два рівняння характеризують поступальний рух плоскої фігури, при якому всі її точки рухаються так само, як і полюс; а третє рівняння – обертальний рух навколо полюса. Кутова швидкість і кутове пришвидження обертального руху фігури не залежать від вибору полюса.

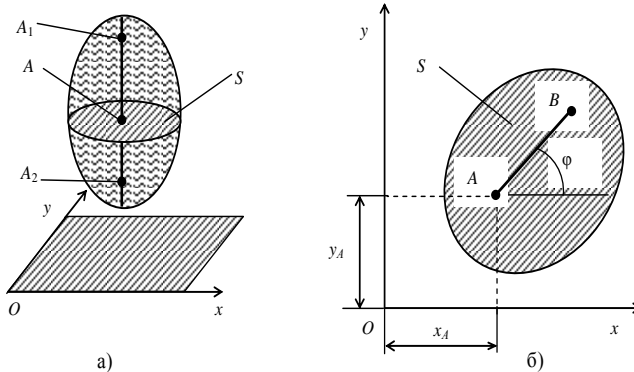


Рисунок 2.11

Швидкість будь-якої  $B$  плоскої фігури дорівнює геометричній сумі двох швидкостей: швидкості полюса  $A$  і швидкості  $B$  при обертанні разом з тілом навколо цього полюса:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad \vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \overline{AB}; \quad |\vec{v}_{BA}| = \omega \cdot AB.$$

Модуль і напрямок швидкості встановлюється за відповідними векторами, як показано на рис. 2.12 а.

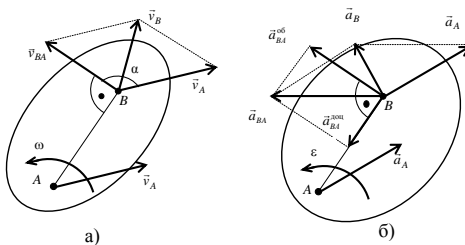


Рисунок 2.12

Прискорення  $B$  плоскої фігури, як показано на рис. 2.12 б, дорівнює геометричній сумі прискорення полюса  $A$  і прискорення, якого  $B$  набуває при обертанні тіла навколо полюса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA};$$

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{об} + \vec{a}_{BA}^{доп} = \vec{\varepsilon} \times \overline{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{AB}).$$

Можна знайти модулі відповідних векторів:

$|\vec{a}_{BA}^{об}| = \varepsilon \cdot AB$ ;  $|\vec{a}_{BA}^{доп}| = \omega^2 \cdot AB$ , а модуль вектора прискорення точки  $B$ :

$$|\vec{a}_{BA}| = \sqrt{(a_{BA}^{об})^2 + (a_{BA}^{доп})^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Плоско-паралельний рух тіла у деякий момент часу можна розглядати як обертальний рух навколо миттєвого центра обертання, або миттєвого центра швидкостей (МЦШ). Миттєвий центр швидкостей - це точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Як показано на рис. 2.13, за допомогою кутової швидкості фігури та швидкості будь-якої точки фігури можна визначити положення МЦШ:

1. У загальному випадку МЦШ лежить в точці перетину перпендикулярів, проведених з двох точок плоскої фігури до їх швидкостей (рис.2.13 а). Кутова швидкість  $\omega$  плоскої фігури у кожний момент часу дорівнює відношенню швидкості будь-якої точки фігури до її відстані від МЦШ:  $\omega = v_A / AP = v_B / BP$ . Тому швидкість будь-якої точки плоскої фігури у кожний момент часу дорівнює добутку кутової швидкості  $\omega$  на відстань від даної точки до МЦШ:  $v_B = \omega \cdot BP$  ( $\vec{v}_B \perp BP$ ),  $v_C = \omega \cdot CP$  ( $\vec{v}_C \perp CP$ ), і т.п.
2. Якщо  $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ ,  $\vec{v}_A \perp AB$  (рис. 2.13б та рис. 2.13в), то  $\omega = v_A / AP = v_B / BP$ .

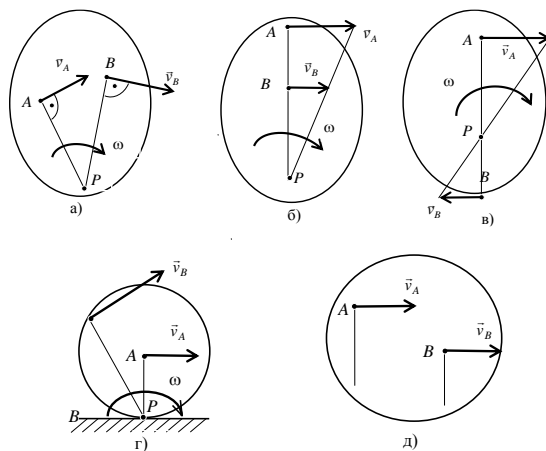


Рисунок 2.13

3. У випадку, якщо тіло котиться без проковзування по нерухомій поверхні іншого тіла (рис. 2.13г), МЦШ знаходиться в точці  $P$  дотику фігури з цією поверхнею:  $\omega = v_A / AP$ ,  $v_B = \omega \cdot BP$ .

4. Якщо  $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$  й при цьому  $\vec{v}_A$  не перпендикулярна до  $AB$  (рис.2.13д),  $\text{МЦШ} \rightarrow \infty$ ,  $\omega = v_A / \infty = 0$ ,  $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C$ . Це випадок миттєво - поступального руху.

**Найпростіші рухи тіл перетворюються.** Для перетворення руху одного або декількох тіл необхідні рухи інших тіл. Систему твердих тіл, з'єднаних між собою для перетворення рухів, називають **механізмом**. Механізми (передачі) широко використовують у техніці. За допомогою тіл, що здійснюють плоско-паралельний рух, можуть бути перетворені рухи інших абсолютно твердих тіл. При таких перетвореннях має місце як стале співвідношення між швидкостями та прискореннями тіл, що притаманно, наприклад, поліспадам, так й змінне співвідношення між швидкостями та прискореннями тіл, що характерно, наприклад, для кривошипно-шатунних механізмів.

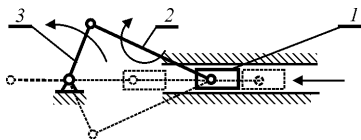


Рисунок 2.14

Кривошипно-шатунний механізм схематично представлено на рис. 2.14. Зворотно-поступальний рух поршня 1 за допомогою шатуна 2, що рухається у площині, перетворюється на обертання навколо нерухокої осі кривошипу 3. Або навпаки обертання навколо

нерухокої осі кривошипу за допомогою шатуна перетворюється на зворотно-поступальний рух поршня. Поступальний рух перетворюється в інший поступальний рух блочними механізмами. Обертальний рух навколо осі перетворюється в обертальний рух відносно іншої осі за рахунок зубчастих або фрикційних передач. Поступальний рух перетворюється в обертальний чи навпаки гвинтовими та кривошипно-шатунними механізмами або пасовими передачами. При розв'язанні інженерних задач кінематичного аналізу механізмів достатньо вважати тіла, що утворюють механізм, абсолютно твердими.

На рис. 2.15 показані перетворення обертання тіла 1 навколо нерухокої осі та поступального руху тіла 2, на рис. 2.16 – перетворення обертань тіл 1 та 2 навколо нерухомих осей. В усіх випадках швидкості точок  $A_1$  та  $A_2$ , відповідних тіл, однакові:  $\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_2}$ .

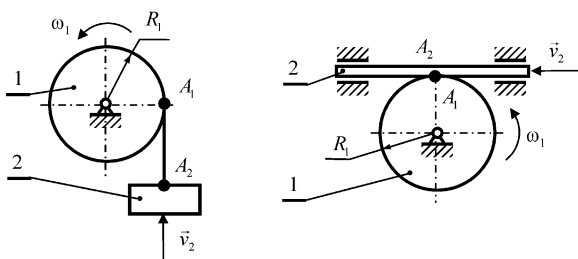


Рисунок 2.15

За цієї умови для перетворень на рис. 2.15 маємо рівність:

$$\omega_1 R_1 = v_2.$$

Для перетворень обертань навколо нерухомих осей (рис. 2.16), має місце наступна рівність:

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2.$$

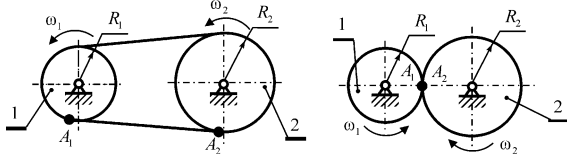


Рисунок 2.16

Таким чином, для зубчастої та пасової (ремінної) передачі маємо між кутовими швидкостями та пришвидженнями справедливі наступні рівності:

$$\omega_1 / \omega_2 = R_2 / R_1; \quad \varepsilon_1 / \varepsilon_2 = R_2 / R_1.$$

У зубчастих коліс кількість зубців  $z$  пропорційна радіусам коліс, тому виконується співвідношення:  $\omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1; \quad \varepsilon_1 / \varepsilon_2 = z_2 / z_1$ .

Комплексні перетворення найпростіших рухів охоплюють не менше трьох найпростіших рухів у будь-якій комбінації. Коли найпростіший рух одного абсолютно твердого тіла викликає аналогічний рух іншого абсолютно твердого тіла завдяки відповідним з'єднанням тіл, то має місце перетворення рухів цих тіл.

### **Питання для самоконтролю**

1. Що називають поступальним рухом твердого тіла?
2. Що називають обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі?
3. Як задати закон обертального руху тіла навколо нерухомої осі?
4. За якими формулами визначається швидкість та пришвидження точки тіла при його обертальному русі?
5. Який рух твердого тіла називають плоско-паралельним та як задати закон цього руху?
6. За якими формулами визначається швидкість та пришвидження точки тіла, якщо його рух є плоско-паралельним?
7. Що називають миттєвим центром швидкості (МЦШ), та за якими формулами з його допомогою визначається кутова швидкість фігури і швидкості будь-якої точки фігури, якщо рух тіла є плоско-паралельним?
8. Які рухи тіл називають найпростішими?
9. Що називають механізмом (передачею)?
10. За яких умов та за рахунок яких механізмів або передач поступальний рух перетворюється в інший поступальний рух; обертальний рух навколо осі перетворюється в обертальний рух відносно іншої осі; поступальний рух перетворюється в обертальний чи навпаки?

## 2.4. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

### Комп'ютерне та аналітичне моделювання кінематики системи тіл

**Ціль роботи** – вивчення закономірностей найпростіших рухів окремих тіл та їхніх точок, якщо рух тіла є заданим, або системи тіл, яка призначена для перетворення руху одного або декількох тіл в необхідні рухи інших тіл.

**Об'єктом** досліджень є окремі тіла й механічні системи тіл - механізми, що перетворюють рухи одного або декількох тіл в необхідні рухи інших тіл.

**Предметом** досліджень є кінематичні характеристики руху окремих тіл та їхніх точок: вектори кутових швидкостей та пришвидження тіл; траєкторії, вектори швидкості й пришвидження точок окремих тіл системи, а також встановлення незалежності кінематичних характеристик від вибору систем координат.

**Методи** досліджень містять аналітичні та комп'ютерні обчислювання.

#### Аналітичне моделювання кінематики системи тіл

**Перший механізм перетворення руху.** Розглянемо наданий на рис.2.17 механізм, який перетворює поступальний рух вантажу, що рухається за законом  $x(t) = 30 + 10t^2$  (см), в обертальний рух барабану 1, за допомогою зубчастої передачі – в обертальний рух двохступеневого блоку 2 та за допомогою пасової передачі з паралельними осями – в обертання шківу 3.

Визначимо кінематичні характеристики руху: швидкість  $\vec{v}$  та пришвидження  $\vec{a}$  вантажу; для тіл 1, 2 й 3 – кутові швидкості  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  та пришвидження  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  цих тіл, швидкості та пришвидження точок  $A, D_1, D_2, M$  (рис.2.18) за заданий час:

$t \in [0, T_k], T_k = \frac{n2\pi}{\omega_3}$ , коли шків 3 зробить  $n$  обертів.

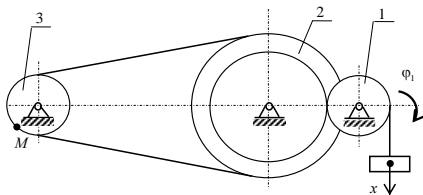


Рисунок 2.17

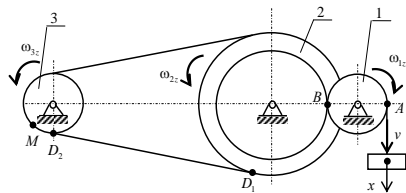


Рисунок 2.18

Поступальний рух кінця тросу, до якого вантаж прикріплено, приводить до обертання барабану 1 радіусом  $R_1 = 10$  см, двохступеневого блоку 2 із зовнішнім шківом радіусом  $R_2 = 30$  см та внутрішньою шестернею радіусом  $r_2 = 20$  см та шківу 3 радіусом  $R_3 = 10$  см.

Визначимо проекції швидкості  $v_x$  та прискорення  $a_x$  поступального руху вантажу:  $v = v_x = \dot{x}$ ,  $a = a_x = \dot{v}_x$ . Далі визначимо кутові швидкості тіл:

$$v_A = v_B, v = v_A = \omega_1 R_1 \Rightarrow \omega_1 = v / R_1, v_{D_1} = v_{D_2}$$

$$v_B = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = v_A / r_2 = \omega_1 R_1 / r_2;$$

$$v_{D_1} = \omega_2 R_2; v_{D_2} = \omega_3 R_3 \Rightarrow \omega_3 = R_2 \omega_2 / R_3.$$

Визначимо кутові пришвиддження тіл:

$$\varepsilon_{1z} = \dot{\omega}_{1z}, \varepsilon_{2z} = \dot{\omega}_{2z}, \varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z}.$$

Лінійні швидкість та пришвиддження точки  $M$  на шківі 3 визначають так:

$$v_M = \omega_{3z} R_3; a_M^{об} = \varepsilon_{3z} R_3, a_M^{доц} = \omega_{3z}^2 R_3; a_M = \sqrt{(a_M^{об})^2 + (a_M^{доц})^2}.$$

**Другий механізм перетворення руху.** Розглянемо механізм – електромеханічний привід, наданий на рис. 2.19 який перетворює обертальний рух валу електродвигуна 1 у поступальний рух тіла 3 та у плоско-паралельний рух колеса 4, що котиться по нерухомій поверхні.



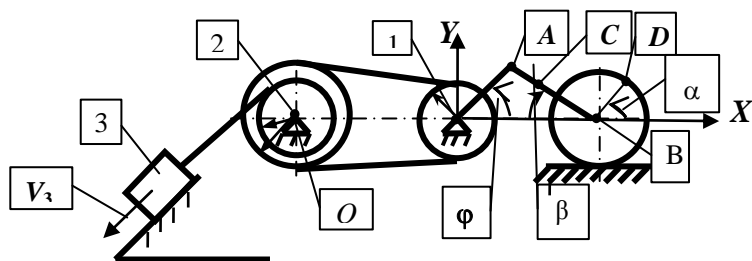


Рисунок 2.19

Для забезпечення переміщень тілу 3 вздовж нахиленої гладкої поверхні у приводі застосовано пасову передачу з паралельними осями шківу з радіусом  $R_1$  та двоступеневого шківу 2, з радіусами  $R_2$  та  $r_2$ . Пасова передача перетворює обертальний рух шківу 1, жорстко зчепленого з валом електродвигуна, у обертальні рухи двоступеневого шківу 2 з намотаним тросом, до якого прикріплено тіло 3. Це дозволяє здійснювати поступальний рух кінця тросу разом з тілом 3. На валу ротора електродвигуна жорстко закріплено кривошип  $O_1A$ , шарнірно зв'язаний з шатуном  $AB$ , край якого  $B$  прикріплено до осі колеса радіусом  $R$ . Кривошипно-шатунний механізм перетворює обертальний рух кривошипа в плоско-паралельний рух колеса, яке котиться без ковзання по горизонтальній поверхні.

Для електромеханічного приводу, вал електродвигуна – 1 якого обертається за законом  $-\varphi = kt^2$  (рад), визначимо кінематичні характеристики руху тіл 1, 2, 3, елементів кривошипно-шатунного механізму  $O_1A$ ,  $AB$  й колеса 4 та їхніх точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  (траєкторії, швидкості та пришвидження) за  $N$  повних обертів валу. Розглянемо виконання завдання. Для пасової передачі визначимо кутові швидкості та прискорення тіл – 1, 2, 3:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1, \varepsilon_1 = \dot{\omega}_1, \omega_2 = \omega_1 R_1 / R_2, \varepsilon_2 = \dot{\omega}_2, v_3 = \omega_2 r_2, a_3 = \varepsilon_2 r_2.$$

Для кривошипно-шатунного механізму скористаємось координатним методом. Зв'яжемо початок системи координат  $O_1XY$  з віссю вала електродвигуна. Запишемо координати точок  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ ,  $C(x_C, y_C)$ ,  $D(x_D, y_D)$ :  $\varphi = 3t^2$ ;  $x_A = OA \cos \varphi$ ,  $y_A = OA \sin \varphi$ ;

$$\beta = \arcsin(y_A / AB); x_B = x_A + AB \cos \beta, y_B = 0;$$

$$x_C = x_A + AC \cos \beta, y_C = y_A - AC \sin \beta.$$

За координатним способом знайдемо кінематичні характеристики руху тіл кривошипно-шатунного механізму  $O_1A$ ,  $AB$  й колеса – 4:

$$\omega_{O_1A} = \dot{\phi}, \quad \varepsilon_{O_1A} = \dot{\omega}_{O_1A}; \quad \omega_{AB} = \dot{\beta}, \quad \varepsilon_{AB} = \ddot{\beta}; \quad \omega_K = \dot{\alpha}; \quad \varepsilon_K = \ddot{\alpha}.$$

та швидкості та пришвидження їхніх точок A,B,C,D:

$$v_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}, \quad a_A = \sqrt{\ddot{x}_A^2 + \ddot{y}_A^2}; \quad v_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2}, \quad a_B = \sqrt{\ddot{x}_B^2 + \ddot{y}_B^2};$$

$$v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}, \quad a_C = \sqrt{\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2}; \quad v_D = \sqrt{\dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2}, \quad a_D = \sqrt{\ddot{x}_D^2 + \ddot{y}_D^2}.$$

**Комп'ютерне моделювання кінематики системи тіл.** Для розв'язання сформульованих завдань використаємо програмний комплекс КІДИМ.

#### Інструкції та розрахункові залежності

РАБОТА:= ЛР №2.1 - Кінематика: перший механізм;

ВЫПОЛНИЛ:=ст.Сидоров гр.ИТ-10а;

РИСУНОК:=ris\_k2.bmp; R1=10; R2=30; r2=20;

R3=10;

x=30+10\*t^2; n=3; Tk=-3/2+sqrt(9/4+n\*PI\*R3/5);

V=x't; a=V't; w1=V/R1; eps1=w1't; w2=w1\*R1/r2 ;

eps2=w2't; w3=w2\*R2/R3; eps3=w3't; VA=w1\*R1;

VB=w2\*r2; VD1=w2\*R2; VD2=w3\*R3;

aoA=w1^2\*R1; adA=eps1\*R1;

aA=R1\*sqrt(w1^4+eps1^2);

aoB=w2^2\*r2;

adB=eps2\*r2;aB=r2\*sqrt(w2^4+eps2^2);

aoD1=w3^2\*R3; adD1=eps3\*R3;

aD1=R3\*sqrt(w3^4+eps3^2);

vM=w3\*R3;anM=vM^2/R3; atM=vM't;

aM=sqrt(anM^2+atM^2);

ВАРЬИРОВАТЬ :=t,0,Tk; ПОКАЗАТЬ:=vM, aM;

СРАВНИТЬ:=шв\_тчк\_A\_B\_D1\_D2 (VA,VB,VD1,VD2),

#### Коментарі

Лабораторна робота №2.1. Кінематика: Перший механізм;

Визначення проєкцій вектора швидкості та прискорення вантажу; кутових швидкостей та пришвидження тіла 1,2,3; швидкості точок A,B,D1,D2; доцентрового та обертального та модуля повного пришвиджень точок A,B,D1,D2

```

шв_груза_тчка_M(V,VA,vM),
склад_пришв_тчка_A(aoA,adA,aA), B(aoB,adB,aB),
D1(aoD1,adD1,aD1),
пришв_тчка_A_B_D(aA,aB,aD1,aM),
кут_швидк (w1,w2,w3), кут_пришв(eps1,eps2,eps3);
РАСЧЕТ:= КИНЕМАТИКА;
РАБОТА:=ЛР К2.2 - Кінематика: електропривід;
R1=10; R2=60; r2=20; OA=15; AB=30; AC=10; R=25;
Fi=k*t^2; k=3;
w1=Fi't; e1=wOA't; w2=Fi't* R1/R2; e2=wOA't*R1/R2;
v3=Fi't*r2*R1/R2; a3=wOA't*r2*R1/R2;
xA=OA*cos(Fi); yA=OA*sin(Fi);
xB=xA+AB*cos(Beta); yB=0; xC=xA+AC*cos(Beta);
yC=yA-AC*sin(Beta); xD=xB+R*cos(Alfa);
yD=R*sin(Alfa);
Beta=arcsin(yA/AB); Alfa=(OA+AB-xB)/R; wOA=Fi't;
eOA=wOA't; wAB=Beta't; eAB=wAB't; wk=Alfa't;
ek=wk't;
vAx=xA't; vAy=yA't; vA=sqrt(vAx^2+vAy^2);
aAx=vAx't; aAy=vAy't; aA= sqrt(aAx^2+aAy^2);
vBx=xB't; vBy=yB't; vB= sqrt(vBx^2+vBy^2);
aBx=vBx't; aBy=vBy't; aB= sqrt(aBx^2+aBy^2);
vCx=xC't; vCy=yC't; vC=sqrt(vCx^2+vCy^2);
aCx=vCx't; aCy=vCy't; aC= sqrt(aCx^2+aCy^2);
vDx=xD't; vDy=yD't; vD=sqrt(vDx^2+vDy^2);
aDx=vDx't; aDy=vDy't; aD=sqrt(aDx^2+aDy^2);
Tk=sqrt(N*2*PI/k); N=2;
ПОКАЗАТЬ:=v3, a3, yA(xA),xB,yC(xC),yD(xD);
СРАВНИТЬ:=угл_скор_тел_1_2(w1,w2),
угл_ускор_тел_1_2(e1,e2),
угл_скор_кривош_шат_колеса(wOA,wAB,wk),
угл_ускор_кривош_шат_колеса(eOA,eAB,ek),
скор_точек_ABCD(vA,vB,vC),
ускор_точек_ABCD(aA,aB,aC);
РАСЧЕТ:=КИНЕМАТИКА;
КОНЕЦ;

```

Інструкції: Зміна часу  $t \in [0, T_k]$

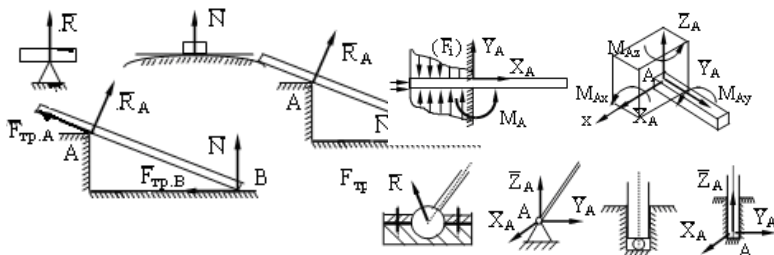
Демонструються швидкості вантажу та точки М, доцентрове, обертальне та повне пришвидшення точки М

Порівнюються швидкості вантажу та точок А й М, кутові швидкості тіл 1, 2, 3, кутові пришвидшення тіл 1, 2, 3, пришвидшення вантажу й точки М, складові пришвидшення точки М, а також пришвидшення точки М, які були отримані різними способами

## 2.5. Сили та реакції, рівновага тіл.

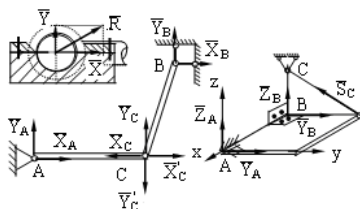
### Теоретичний матеріал. Питання для самоконтролю

**Типи в'язей та їхні реакції.** *Сили реакції* накладених на тіло (систему тіл) в'язей залежать від типу в'язей.

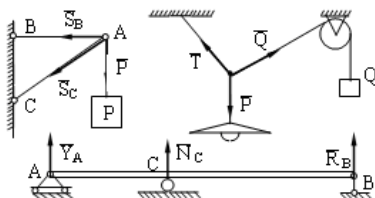


*Гладка поверхня, шортка (негладка) поверхня*

*Затискуючі опори Кульова опора або сферичний шарнір, підп'ятник*



*Шарнірно-нерухома опора або циліндровий шарнір*



*Невагомий стержень з ідеальними шарнірами, гнучка, шарнірно-рухома опора*

**Гладка поверхня** – це поверхня, при визначенні реакції якої силами тертя можна нехтувати. Вектор реакції гладкої поверхні прикладений в точці дотику тіла з поверхнею і направлений по нормалі до поверхні. У разі опори тіла на уступ або вістря (точкову опору), гладкою вважається поверхня самого тіла, а вектор реакції прямує по нормалі до поверхні тіла.

**Шортка (негладка) поверхня** – це поверхня, де по умові задання силами тертя нехтувати не можна. Ця реакція є сукупністю двох сил – нормальної реакції поверхні і сили тертя, яка лежить в до-

тичний площині тіла та прямує убік, протилежний можливому переміщенню тіла по поверхні, і визначається через добуток коефіцієнта тертя ковзання (коефіцієнта зчеплення) на величину сили нормальної реакції поверхні ( $F_{\text{тр}} = f N$ ). Величина  $f$  (коефіцієнта тертя) визначається лише при досягненні силою тертя її максимального значення.

**Ідеальна стрижнева в'язь** – це в'язь, яка реалізується у вигляді прямолінійного або криволінійного ненавантаженого стрижня з ідеальними шарнірами в точках його кріплення до інших тіл і з вагою, якою в задачі можна нехтувати. В таких ідеальних шарнірах відсутнє тертя. Так як характер дії зовнішніх сил на стрижень зазвичай невідомий, то вектор реакції стрижня прийнято направляти від вузла його кріплення до тіла, вважаючи стержень за розтягнутий.

**Гнучка в'язь** (нитка, трос, канат, ланцюг тощо) – це в'язь, яка може працювати лише тоді, коли вона натягнута. Вектор реакції гнучкої в'язі приймають прикладеним в точці, де нитку прикріплено до тіла, рівновага якого розглядується, й направляють уздовж нитки.

**Шарнірно-рухома опора** – це опора, яка дозволяє точці тіла, пов'язаного з опорою, переміщатися без тертя уздовж будь-якої поверхні. Реакція рухомої опори прямує по нормалі до поверхні, уздовж якої може переміщатися опора.

**Шарнірно-нерухома опора або циліндричний шарнір** – це в'язь, яка не дозволяє точці тіла, скріпленого з такою опорою, переміщатися в площині, перпендикулярній осі обертання шарніра, але яка дозволяє тілу за відсутності інших зв'язків повертатися відносно цієї осі. Умовно мається на увазі, що в шарнірі відсутнє тертя. Конструктивне виконання шарнірно-нерухомої опори: це можуть бути і підшипники ковзання, і підшипники кочення, і просто пальцеві з'єднання тощо. Сила реакції шарнірно-нерухомої опори розташована в площині, перпендикулярній осі обертання шарніра; проходить через центр шарніра; невідома ані за величиною, ані за напрямком.

**Кульова опора або сферичний шарнір** – це в'язь, яка не дозволяє одній з точок тіла переміщатися ні в одному з напрямків, а до-

зволяє тілу повертатися в певних межах щодо будь-якої з координатних осей, що проходять через цю точку.

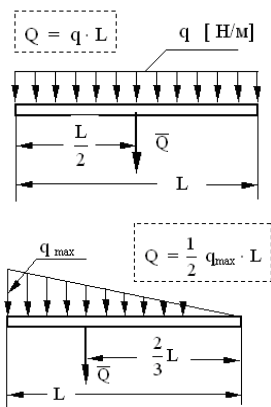
Реакція такої опори невідома ані за величиною, ані за напрямком в просторі. Її компоненти по осях координат і є шуканими величинами.

**Підп'ятник** – це в'язь, яка є комбінацією циліндричного шарніра і опорної площості. Реакція підп'ятника, як і в сферичного шарніра, визначається по її складових, направлених уздовж трьох координатних осей.

**Затискуючи опори** (жорсткі защемлення) – це умовна назва в'язей, які перешкоджають защемленому тілу переміщатися в будь-якому напрямку і повертатися навколо будь-якої з координатних осей. Прикладами таких опор є: закладені в стіну будинку плити підвіконь або балконів, кронштейни для кріплення труб, балок і рам, звичайні вбиті в стіну болти, цвяхи і інше. Невідому силу реакції визначають через її компоненти, а момент невідомої пари сил прийнято називати моментом затиснення.

Окрім жорсткого затиснення можуть зустрітися і ковзаючі затиснення – це в'язі, які не дозволяють закріпленому тілу повертатися щодо точки закріплення і переміщатися лише в одному з напрямів.

**Розподілені навантаження** розрізняють: навантаження, розподілені за деякою площею, і навантаження, розподілені по деякій довжині.



Характеризуються ці навантаження інтенсивністю  $p$ , Н/м<sup>2</sup> і  $q$ , Н/м. Найбільш типові випадки заміни зосередженою силою рівномірно розподіленого навантаження і навантаження, що змінюється по лінійному закону, представлені на рисунках. Графічне зображення зміни інтенсивності навантаження по довжині прийнято називати **епюрою**. Величина сили дорівнює площі епюри, а лінія дії сили проходить через центр тяжіння площі епюри.

**Моментом сили відносно осі** називається узятий з відповідним знаком добуток проекції сили на площину, перпендикулярну осі, на плече проекції відносно точки перетину осі і площини. Момент сили відносно осі дорівнює нулю, коли сила паралельна осі або коли лінія дії сили перетинає вісь, або інакше, коли вектор сили і вісь розташовані в одній площині. *Момент сили вважається за позитивний*, якщо з позитивного напрямку осі видно, що сила прагне обернути тіло проти годинникової стрілки. *Для визначення моментів сил відносно точок і осей* при складанні рівнянь рівноваги доцільно застосовувати певний лад розгляду: 1) моментом сили відносно точки називається добуток модуля сили на її плече; 2) момент сили вважається за позитивний, якщо сила прагне обернути тіло відносно точки проти годинникової стрілки і негативним, якщо за часовою стрілкою; 3) момент сили щодо точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через точку.

**Рівняння рівноваги** – це аналітичні рівності умов рівноваги конкретної системи тіл або тіла, в які вводяться невідомі параметри: реакції в'язів, сили, відстані, кути тощо.

**Векторні умови рівноваги плоскої системи сил** є необхідними й достатніми умовами для рівноваги плоскої довільної системи сил, за якими *геометрична сума всіх сил* (головний вектор сил) дорівнює нулеві а також *алгебраїчна сума моментів* всіх сил системи відносно будь-якої точки, яка лежить у площині дії сил, також дорівнює нулеві,

тобто:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0, \sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k) = 0.$$

Для складання рівнянь рівноваги необхідно обрати тіло, прийняти до розгляду вектори активних сил чи пар сил (моменти) й відповідні в'язям вектори реакцій та пар, визначити проекції сил на осі координат і моменти сил відносно вибраних точок і осей, скласти рівняння рівноваги відповідно попереднім умовам.

**Теорема Варіньона** – це твердження про те, що момент рівнодійної системи сил відносно будь-якої точки дорівнює сумі моментів сил системи відносно цієї ж точки. Застосовують цю теорему так: силу

розкладають на складові по координатних осях і визначають момент сили як суму алгебраїчних моментів її складових.

### **Питання для самоконтролю**

1. Що розуміють під розрахунковою схемою тіла, рівновага якого розглядається? Як поділяють сили й вибирають типи і напрями сил реакцій накладених на тіло в'язей? Для чого на схемі вибирають систему координатних осей?
2. Які типи в'язей Ви знаєте? Покажіть реакції цих в'язей.
3. Як розрізняються розподілені навантаження? Чим характеризуються ці навантаження, і за якими одиницями задають їхні інтенсивності?
4. Як виконують заміну розподілених сил зосередженими силами у випадках рівномірно розподіленого навантаження і навантаження, що змінюється по лінійному закону? Що таке епюра сил, покажіть це на рисунку.
5. Як визначають сили реакцій накладених на тіло (систему тіл) в'язей залежно від типу в'язів: Гладка поверхня? Шорстка (негладка) поверхня? Що таке сила тертя, коефіцієнт тертя ковзання (коефіцієнта зчеплення)? Як виглядає закон тертя при досягненні тертя її максимального значення? Невагомий стрижень з ідеальними шарнірами на кінцях? Гнучка нитка? Шарнірно-рухома опора? Шарнірно-нерухома опора або циліндричний шарнір? Яке конструктивне виконання шарнірно-нерухомої опори в техніці? Кульова опора або сферичний шарнір? Під'ятник? Затискуючи опори, звані також жорсткі защемлення? Ковзаючи затискання?
6. З якою метою проводять перевірку на статичну визначність?
7. Що таке рівняння рівноваги? Як записуються векторні умови рівноваги плоскої системи сил?
8. Що таке векторні умови рівноваги просторової системи сил?
9. Як визначити моменти сил відносно точок і осей при складанні рівнянь рівноваги?
10. Як застосувати теорему Варіньона для визначення моментів сил?



## 2.6. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

### Визначення реакцій в'язей тіл, які знаходяться під дією плоскої та просторової системи сил

**Ціль роботи** – вивчення за дослідженнями змін реакцій в'язей невідільних матеріальних тіл при переході к іншим видам в'язей та активним силам. Тіла знаходяться в рівновазі під дією довільної плоскої та просторової систем сил.

**Об'єктом** досліджень є невідільні тіла, які знаходяться під дією плоскої та просторової системи сил.

**Предметом** досліджень є властивості реакцій типових в'язей (опор, стрижнів, шарнірів та ін.), які утримують тіла в рівновазі при дії на тіла активних сил (збіжних, плоских, просторових), визначення змін реакцій в'язів при переході к іншим видам в'язів та активним силам.

**Методи** досліджень містять: аналітичні та комп'ютерні обчислювання.

**Аналітичне визначення реакцій жорсткого защемлення при статичній рівновазі під дією плоскої системи активних сил.** Визначимо реакції в точці  $A$  жорсткого затиснення ломаного бруса  $ABC$ , який показано на рис. 2.20.

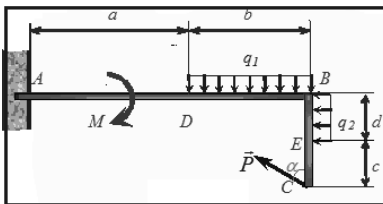


Рисунок 2.20

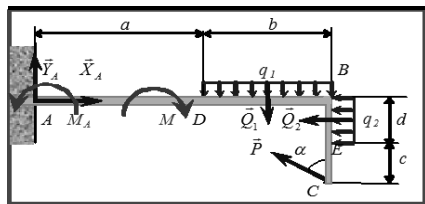


Рисунок 2.21

Активні сили, які діють на брус, це по-перше, розподілені по відрізках  $DB$  й  $BE$  сили інтенсивністю  $q_1$  та  $q_2$ , а по-друге, це зосереджена в точці  $C$  сила  $\vec{P}$  та діюча на відрізок  $AB$  бруса пара сил з моментом  $M$ . Дослідимо вплив активної сили  $P \in [0, 30 \text{ кН}]$ , кута  $\alpha \in [0, 360^\circ]$  між лінією дії сили  $\vec{P}$  та відрізком  $BC$  на величини складових реакції жор-

сткого затиснення  $X_A$ ,  $Y_A$  й моменту в затисненні  $M_A$ , які показані на рис.2.21. З метою аналітичного визначення реакції жорсткого затиснення в точці  $A$  ломаного бруса  $ABC$  –  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $M_A$  при статичній рівновазі під дією плоскої системи активних сил  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}_1$ ,  $\vec{Q}_2$  та активного моменту  $M$ , прийнемо наступними розміри бруса:  $a = 2$  м,  $b = 3$  м,  $c = 1$  м,  $d = 2$  м; інтенсивності розподілених сил:  $q_1 = 2$  кН/м и  $q_2 = 5$  кН/м; момент пари сил  $M = 8$  кНм.

Значення зосереджених сил  $Q_1$  та  $Q_2$ , які є рівнодійними розподілених сил інтенсивністю  $q_1$  й  $q_2$ , підраховують так:  
 $Q_1 = q_1 b$ ;  $Q_2 = q_2 d$ .

Оберемо систему координат  $Axy$  з центром в точці  $A$  та запишемо рівняння рівноваги балки  $ABC$ :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A - Q_2 - P \sin \alpha = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A - Q_1 + P \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = M_A - Q_1 \cdot (a + b / 2) - Q_2 \cdot d / 2 - M + P \cos \alpha \cdot (a + b) - P \sin \alpha \cdot (d + c) = 0.$$

Задача про визначення реакцій опор за умов рівноваги розглянутого тіла відповідає статично визначеній. Система рівнянь відносно трьох невідомих величин:  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $M_A$  можна однозначно розв'язати:

$$X_A = Q_2 + P \sin \alpha; \quad Y_A = Q_1 - P \cos \alpha;$$

$$M_A = Q_1(a + b / 2) + Q_2 d / 2 + M - P \cos \alpha(a + b) + P \sin \alpha(d + c).$$

Перевірку достовірності значень реакцій, що знайдені розв'язуванням системи рівнянь рівноваги балки,здійснемо шляхом визначення моменту сил відносно іншої за  $A$  точки, наприклад, точки  $C$ . Якщо рівняння вірно складені й вірно розв'язані, то значення цього моменту буде дорівнювати нулеві:

$$\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = -Y_A(a + b) - X_A(d + c) - M + M_A + Q_1 \cdot b / 2 + Q_2(c + d / 2) = 0.$$

$$\text{або: } e = (Y_A(a + b) + X_A(d + c) + M) / (M_A + Q_1 \cdot b / 2 + Q_2(c + d / 2)) = 1.$$

Значення модуля реакції в жорсткому затисканні  $A$  та кут  $\beta$  між вектором реакції  $\vec{R}_A$  й віссю  $Ax$  можна визначити так:

$$|\vec{R}_A| = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \quad \beta = \arccos(X_A / R_A).$$

**Аналітичне визначення реакцій жорсткого затиснення при статичній рівновазі під дією просторової системи активних сил.** Визначимо реакції жорсткого просторового затиснення в точці  $A$  невагомого ломаного бруса  $ABC$ , як показано на рис. 2.22.

Брус, який за допомогою перекинутого через нерухомий блок  $D$  та прикріпленого до кінця бруса  $C$  тросу утримує в рівновазі вантаж вагою  $Q$ , розташовано в горизонтальній площині  $xAy$  та навантажено силою  $\vec{P}$ ,  $|\vec{P}| = 4$  кН, парою сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$ , вектор-момент якої  $\vec{M}$ ,  $|\vec{M}| = 0.2$  кН·м. Крім того,  $Q = 2$  кН. Сила  $\vec{P}$  розташована в площині, яка перпендикулярна осі  $Ay$  та складає з прямою  $BC$  кут  $\alpha = 30^\circ$ .

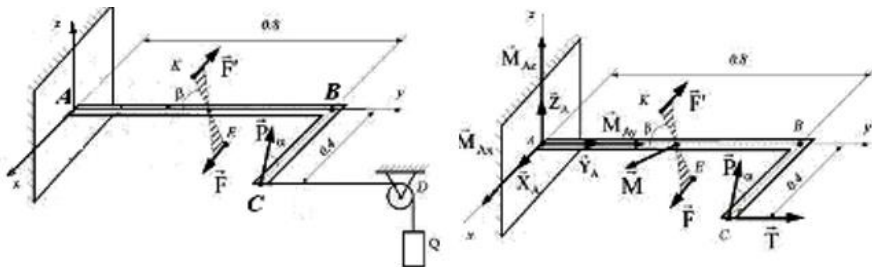


Рисунок 2.22

Стрижень  $KE$ , до кінцям якого прикладені сили пари, є паралельним до осі  $Ax$ , жорстко прикріпленим до рами й розташованим в площині  $yAz$  під кутом  $\beta$  до осі  $Ay$ . Пряма  $CD$  паралельна до осі  $Ay$ . Розміри на схемі надані в метрах:  $AB=a=0,8$  м,  $BC=b=0,4$  м. Дослідимо вплив ваги вантажу  $Q \in [0, 2 \text{ кН}]$  на значення складових реакції жорсткого затиснення  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Z_A$  й складових моменту в затисненні  $M_{Ax}$ ,  $M_{Ay}$ ,  $M_{Az}$ . Встановимо вплив кута  $\beta \in [0, 360^\circ]$  між стрижнем  $KE$ , до

кінцям якого прикладені сили пари, й віссю  $Ay$  на значення реакції жорсткого затиснення  $\vec{R}_A$  й моменту в затисненні  $\vec{M}_A$ .

**Аналітично визначимо реакції** жорсткого затиснення в точці  $A$  ломаного бруса  $ABC - X_A, Y_A, Z_A, M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}$  при статичній рівновазі під дією просторової системи активних сил:  $\vec{P}$ ,  $\vec{T}$  та активного моменту пари сил  $\vec{M}$  (рис. 2.22). Активна сила  $\vec{T}$  натягнення ниті дорівнює силі ваги вантажу  $Q$ , оскільки тертя в блоці  $D$  відсутнє:  $T=Q$ . Оберемо систему координат  $Axy$  з центром в точці  $A$  та запишемо рівняння рівноваги балки  $ABC$  відносно невідомих:  $X_A, Y_A, Z_A, M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} &= X_A - P \cos \alpha = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = Y_A + Q = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = Z_A + P \sin \alpha = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_x(\vec{P}_i) &= M_{Ax} + P \sin \alpha \cdot AB = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_y(\vec{P}_i) = M_{Ay} - P \sin \alpha \cdot BC - M \sin \beta = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_z(\vec{P}_i) &= M_{Az} + Q \cdot BC + P \cos \alpha \cdot AB - M \cos \beta = 0. \end{aligned}$$

Розглянута система рівнянь є статично визначеною, бо з шістьох алгебраїчних рівнянь однозначно одержимо шість невідомих величин:

$$\begin{aligned} X_A &= P \cos \alpha; \quad Y_A = -Q; \quad Z_A = -P \sin \alpha; \quad M_{Ax} = -P \sin \alpha \cdot AB; \\ M_{Ay} &= P \sin \alpha \cdot BC + M \sin \beta; \quad M_{Az} = -Q \cdot BC - P \cos \alpha \cdot AB + M \cos \beta. \end{aligned}$$

Перевірку достовірності значень реакцій, що знайдені розв'язуванням системи рівнянь рівноваги балки, здійснимо на підставі виконання вирази рівності нулю моменту сил відносно точки  $C$ :

$$e = (Y_A \cdot b + M \cdot \cos \beta) / (M_{Az} + X_A \cdot a) = 1.$$

За складовими реакції в жорсткому затисненні можна визначити модулі

$$\vec{R}_A \text{ та } \vec{M}_A: \quad |\vec{R}_A| = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}, \quad |\vec{M}_A| = \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2}.$$

**Комп'ютерне визначення реакцій в'язей конструкції під дією плоскої та просторової системи активних сил.** Розглянемо вихідний файл.

| <b>Інструкції та розрахункові залежності</b>                      | <b>Коментарі</b>  |
|---|---|
| РАБОТА:= №3 Плоска система сил;                                   | Лабораторна робота. №3.   |
| ВЫПОЛНИЛ:= ИТ-10а Сидоров И.А.;                                   | Плоска система сил.   |
| РИСУНОК:=ris_c1.bmp;  |   |
| P=30; q1=2; q2=5; M=8;  | Вихідні дані.   |
| Q1=q1*b; Q2=q2*d;   |   |
| a=2; b=3; d=2; c=1; alfa=PI/6;                                    | Рівняння рівноваги в проекціях сил на осі системи координат Аху та моментів сил відносно точки А      |
| P.x=XA-Q2-P*sin(alfa);  |   |
| P.y=YA-Q1+P*cos(alfa);  |   |
| P.fiz=MA-M-Q1*(a+b/2)-Q2*d/2+P*cos(alfa)*(a+b)-P*sin(alfa)*(d+c); | Перевірка розв'язків задачі.  |
| e=(YA*(a+b)+XA*(d+c)+M)/(MA+Q1*b/2+Q2*(c+d/2));                   | Невідомі реакції жорсткого затискання А.  |
| RA=sqrt(XA^2+YA^2);   |   |
| НЕИЗВЕСТНЫЕ := XA,YA,MA;  | Визначення впливу на реакції жорсткого затискання А шляхом варіювання активною силою Р: Р=(0...30) кН |
| ПОКАЗАТЬ:= RA, e;   | Лабораторна робота. №3.1  |
| ВАРЬИРОВАТЬ :=P(0,30);  | Вплив кута α напрямку сили Р: alfa=(π/6, 2π)  |
| РАСЧЕТ:= СТАТИКА;   |   |
| РАБОТА:=№3.1 Вплив кута напрямку сили Р;                          | Лабораторна робота №3.2   |
| ВАРЬИРОВАТЬ:= alfaG(30,360);                                      | Просторова система сил.   |
| alfa=alfaG*PI/180;  | Вплив вантажу Q.  |
| РАСЧЕТ:=СТАТИКА;  | Вихідні дані  |
| РАБОТА:= №3.2 Просторова система сил. Вплив вантажу Q;            |   |
| P=4; M=0.2; a=0.8; b=0.4; alfa=PI/6;                              |   |
| beta=PI/3;  |   |

$P.x = XA - P \cdot \cos(\alpha);$   
 $P.y = YA + T;$   
 $P.z = ZA + P \cdot \sin(\alpha);$   
 $P.f_{ix} = MA_x + P \cdot \sin(\alpha) \cdot a;$   
 $P.f_{iy} = MA_y - P \cdot \sin(\alpha) \cdot b - M \cdot \sin(\beta);$   
 $P.f_{iz} = MA_z + T \cdot b + P \cdot \cos(\alpha) \cdot a -$   
 $M \cdot \cos(\beta);$   
 $T = Q;$   
 $RA = \sqrt{XA^2 + YA^2 + ZA^2};$   
 $MA = \sqrt{MA_x^2 + MA_y^2 + MA_z^2};$   
 $e = (YA \cdot b + M \cdot \cos(\beta)) / (MA_z + XA \cdot a);$   
 НЕИЗВЕСТНЫЕ := XA, YA, ZA, MA<sub>x</sub>,  
 MA<sub>y</sub>, MA<sub>z</sub>;  
 ПОКАЗАТЬ := RA, MA, e;  
 ВАРЬИРОВАТЬ := Q(0,2);  $\alpha G = 30;$   
 РАСЧЕТ := СТАТИКА;  
 РАБОТА := №3.3 Вплив кута напрямку  
 моменту пари сил M;  
 ВАРЬИРОВАТЬ :=  $\beta G(0,360); Q = 2;$   
 $P = 4;$   
 $M = 0.2; \alpha G = 30; \alpha = \pi/6;$   
 $\beta = \beta G \cdot \pi/180;$   
 РАСЧЕТ := СТАТИКА;  
 РАБОТА := №3.4 Вплив кута напрямку  
 сили P;  
 ПОКАЗАТЬ :=  $\alpha, \beta, RA, MA, e;$   
 ВАРЬИРОВАТЬ :=  $\alpha G(0,360);$   
 $Q = 2; P = 4; M = 0.2; \beta G = 60;$   
 $\alpha = \alpha G \cdot \pi/180;$   
 РАСЧЕТ := СТАТИКА;  
 КОНЕЦ;

Рівняння рівноваги в проекціях сил на осі системи координат  $Axuz$  та моментів сил відносно координатних осей

Підрахунок реакції жорсткого затискання  $A$

Перевірка розв'язків задачі  
Невідомі в системі рівнянь  
рівноваги.

Варіювання вагою  $Q$  вантажу:  $Q = (0 \dots 2)$  кН,  $\alpha G = 30$ .

Лабораторна робота №3.3

Вплив кута напрямку моменту пари сил  $M$ ;

Варіювання кутом  $\beta$ :  $\beta = (0, \pi)$   
при  $Q = 2; P = 4; M = 0.2;$

$\alpha G = 30; \alpha = \pi/6;$

Лабораторна робота №3.4

Вплив кута напрямку сили  $P$ ;

Варіювання кутом  $\alpha$ :

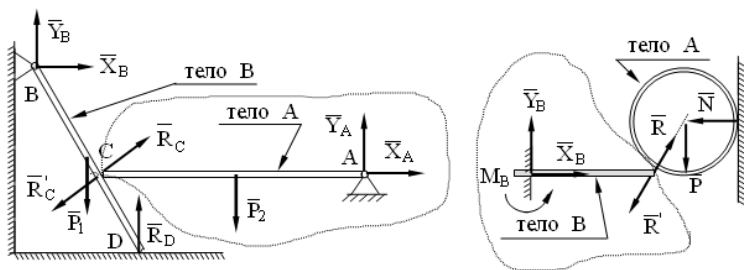
$\alpha = (0, 2\pi)$  при  $Q = 2; P = 4;$   
 $M = 0.2; \beta G = 60;$

## 2.7. Рівновага складеної системи тіл. Теоретичний матеріал

**Складеними конструкціями** називають сукупності з'єднаних між собою абсолютно твердих тіл. Тобто, складені конструкції – це конструкції, в яких розглядається рівновага системи тіл, які зв'язані один з одним. З'єднання тіл між собою мають два основних варіанти:

1) одне з тіл в системі вільно спирається на інше тіло і у цьому варіанті напрямлення сил взаємодії (внутрішніх сил реакцій в'язей між тілами) відомі, бо сили взаємодії направлені по нормалі або до поверхні, на яку спираються, або якою спираються, або до обох разом.

2) тіла з'єднуються між собою шарніром. В цьому випадку напрямлення сили, яка діє в шарнірі з боку одного тіла на інше, невідоме ані за значенням, ані за напрямком.



### Схеми розв'язання задач для плоских складених конструкцій:

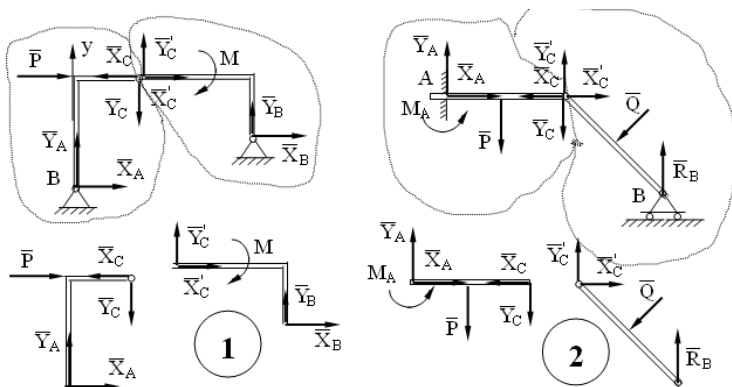
1) Складаються розрахункові схеми для сил, які діють на кожне з тіл. Щоб визначити реакції опор складеної конструкції розглядають рівновагу кожного її тіла з урахуванням дії активних сил, реакцій зовнішніх опор, а також інших з'єднаних з ними тіл введенням невідомих реакцій шарнірних та (або) ковзаючих з'єднань. Активні сили та реакції опор кожного тіла складеної конструкції утворюють плоску систему сил, для якої можна записати три умови рівноваги, і, таким чином, для складеної конструкції із  $n$  абсолютно твердих тіл, маємо можливість записати  $3n$  скалярних умов рівноваги, які можемо розв'язати,

якщо їхня кількість дорівнює кількості невідомих реакцій зовнішніх опор  $r$  та внутрішніх для конструкції  $2(n-1)$  реакцій з'єднань:

$$3n = r + 2(n-1) \Rightarrow n = r - 2.$$

Рівняння рівноваги для окремих часток конструкції складати простіше, ніж для всієї конструкції. Наприклад, якщо складена конструкція складається з двох тіл, тобто  $n=2$ , то для кожного з тіл записуються три рівняння рівноваги й з шести рівнянь знаходяться всі шукані невідомі величини.

2) Складається розрахункова схема для всієї конструкції і розрахункова схема для тіла, на яке діє простіша система сил. Рівняння рівноваги записуються для даного тіла і для всієї конструкції. При складанні рівнянь рівноваги для всієї конструкції система внутрішніх сил в шарнірі, як система взаємно урівноважених сил, не розглядається.



**Перевірка на статичну визначність**, тобто можливість рішення задачі методами статки, полягає в зіставленні кількості невідомих в даному завданні з числом рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної системи тіл і сил. Для цієї перевірки необхідно знати число аналітичних умов рівноваги кожної з можливих систем сил, добре уявляти собі, яка система сил діє на кожне з тіл. При вирішенні завдань на складені конструкції в процесі такої перевірки вибирають раціональний план розв'язання задачі.



### **Питання для самоконтролю**

1. Що розуміють під розрахунковою схемою системи тіл або конструкції, рівновага якої розглядається
2. Як визначають сили реакцій накладених на систему тіл в'язей залежно від типу в'язів: Гладка поверхня ? Шорстка поверхня ? Що таке сила тертя, коефіцієнт тертя ковзання (коефіцієнта зчеплення) ? Як виглядає закон тертя при досягненні тертя її максимального значення? Невагомий стрижень з ідеальними шарнірами на кінцях? Гнучка нитка? Шарнірно-рухома опора? Шарнірно-нерухома опора або циліндричний шарнір? Яке конструктивне виконання шарнірно-нерухомої опори в техніці? Кульова опора або сферичний шарнір? Під'ятник ? Затискуючи опори, звані також жорсткі защемлення ? Ковзаючи затискання?
3. Що таке складені конструкції ? Як поділяють з'єднання тіл між собою в складених конструкціях ?
4. Як скласти рівнянь рівноваги тіла, або системи тіл ?
5. Які застосовують схеми розв'язання задач для плоских складених конструкцій?
6. З якою метою проводять перевірку на статичну визначність ?

## **2.8. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4**

### **Визначення реакцій в'язей складеної системи тіл**

**Ціль роботи** — вивчення закономірностей рівноваги системи матеріальних тіл й змін реакцій в'язей при переході к іншим видам в'язей та активних сил; придбання навичок використання сучасних комп'ютерних технологій для дослідження рівноваги систем тіл, на які діє плоска система сил.

**Об'єктом** досліджень є системи тіл, які знаходяться під дією плоскої системи сил, та реакції накладених на ці тіла типових в'язей (опор, стрижнів, шарнірів та ін.), які при дії активних сил утримують тіла в рівновазі.

**Предметом** досліджень є властивості реакцій в'язей системи матеріальних тіл й зміни цих реакцій при переході к іншим видам в'язей та активних сил.

**Методи** досліджень містять аналітичні та комп'ютерні обчислювання.

**Аналітичне визначення реакцій в'язей складеної конструкції.** Складена конструкція показана на рис.2.23. Аналітично визначимо реакції зовнішнього рухомого шарніру  $A$ , жорсткого затиснення  $B$  та шарнірного з'єднання  $C$  складеної конструкції двох абсолютно твердих тіл при статичній рівновазі під дією плоскої системи активних

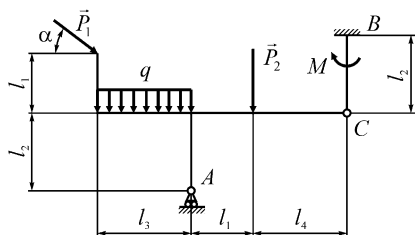


Рисунок 2.23

сил:  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$ ,  $\vec{Q}$ , а також моменту  $M$ . Прийнемо наступні вихідні дані:

$$q = 1,6 \text{ кН/м}, \quad M = 17 \text{ кНм},$$

$$\vec{P}_1 \quad (10 \leq |\vec{P}_1| \leq 20 \text{ кН}) \quad \text{та} \quad \vec{P}_2$$

$$(P_2 = 12 \text{ кН}), \quad 0 \leq \alpha \leq 360^\circ,$$

$$l_1 = 1; \quad l_2 = 1,5; \quad l_3 = 2; \quad l_4 = 3, \text{ м.}$$

Дослідимо вплив активної сили  $\vec{P}_1$  та кута  $\alpha$  між лінією дії цієї сили та горизонтальною прямою на значення складових реакцій рухомого шарніру  $A$ , жорсткого затиснення  $B$  та шарніру  $C$ .

Відповідно рис. 2.24, умовно розділимо конструкцію в шарнірному з'єднанні  $C$  та введемо невідомі реакції:  $\vec{R}_A$  – рухомого шарніру  $A$ ;  $\vec{R}_{Bx}$ ,  $\vec{R}_{By}$ ,  $\vec{M}_B$  – жорсткого закріплення  $B$ ;  $\vec{R}_{Cx}$ ,  $\vec{R}_{Cy}$  – шарнірного з'єднання  $C$ . Рівнодійна  $\vec{Q}$  розподіленого навантаження за модулем дорівнює  $Q = q \cdot l_3$ .

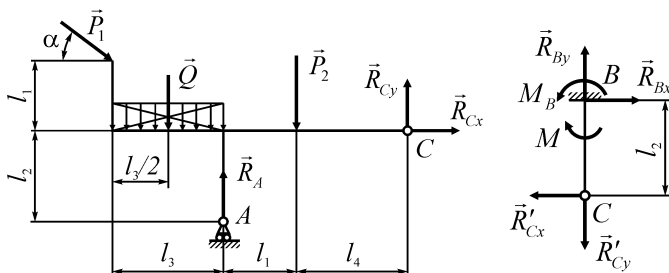


Рисунок 2.24

Запишемо рівняння рівноваги для кожного окремого тіла складеної конструкції. Для частини АС:

$$R_{Cx} + P_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$R_{Cy} + R_A - P_2 - P_1 \sin 30^\circ - Q = 0;$$

$$P_2 l_4 - R_A (l_1 + l_4) + Q \left( \frac{l_3}{2} + l_1 + l_4 \right) + P_1 \sin 30^\circ (l_3 + l_1 + l_4) - P_1 \cos 30^\circ l_1 = 0;$$

Для частини СВ:

$$-R_{Cx} + R_{Bx} = 0;$$

$$-R_{Cy} + R_B = 0;$$

$$M_B - M - R_{Cx} l_1 = 0.$$

Умови рівноваги утворюють систему шести алгебраїчних рівнянь, яка дозволяє визначити усі шість шуканих невідомих опорних реакцій складеної конструкції. Ці рівняння є лінійними відносно шуканих реакцій та можуть бути тривіально розв'язані для наявних вихідних даних

За складовими реакціями в жорсткому затисканні *B* та шарнірі

*C* можна визначити їх модулі:  $R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2}$ ;  $R_C = \sqrt{R_{Cx}^2 + R_{Cy}^2}$ .

**Комп'ютерне визначення реакцій в'язей складеної конструкції при статичній рівновазі під дією плоскої системи активних сил.** Розглянемо вихідний файл.

## Інструкції та розрахункові залежності

РАБОТА:= №4.1 Реакції складеної конструкції;

ВЫПОЛНИЛ:= студент Сидоров

И.А.,ИТ-10а;

$P_2=12$ ;  $M=17$ ;  $q=1.6$ ;  $\alpha G^\circ=30$ ;  $Q=2*q$ ;

$\alpha=\alpha G^\circ * \pi / 180$ ;

$P.x_{AC}=R_{cx}+P_1 * \cos(\alpha)$ ;

$P.y_{AC}=R_{cy}+R_a-P_2-P_1 * \sin(\alpha)-Q$ ;

$P.m_{CAC}=3*P_2-$

$4*R_a+5*Q+6*P_1 * \sin(\alpha)-1*P_1 * \cos(\alpha)$ ;

$P.x_{BC}=-R_{cx}+R_{bx}$ ;

$P.y_{BC}=-R_{cy}+R_{by}$ ;

$P.m_{BCB}=M_b-M-1.5*R_{cx}$ ;

НЕИЗВЕСТНЫЕ :=

$R_{cx}, R_{cy}, R_a, R_{bx}, R_{by}, M_b$ ;

$R_c = \sqrt{R_{cx}^2 + R_{cy}^2}$ ;

$R_b = \sqrt{R_{bx}^2 + R_{by}^2}$ ;

ПОКАЗАТЬ :=  $R_a, R_c, R_b$ ;

ВАРЬИРОВАТЬ :=  $P_1(10,20)$ ;

СРАВНИТЬ:= реак-

ции\_шарниров\_и\_заделки ( $R_a, R_c, R_b$ );

РАСЧЕТ := ДИАГНОСТИКА;

РАСЧЕТ := СТАТИКА;

РАБОТА:= №4.2 Дослідження впливу кута  $\alpha$  на реакції складеної конструкції:

$\alpha=(0, 2\pi)$ ;

ВАРЬИРОВАТЬ :=  $\alpha G^\circ(0,360)$ ;

РАСЧЕТ := ДИАГНОСТИКА;

РАСЧЕТ := СТАТИКА;

КОНЕЦ;

## Коментарі

Лабораторна робота №4.1.

Реакції складеної конструкції.

Вихідні дані

Рівняння рівноваги в проєкціях сил на осі системи координат Аху та моментів сил відносно точки С для лівої частини складеної конструкції.

Рівняння рівноваги в проєкціях сил на осі системи координат Аху та моментів сил відносно точки В для правої частини складеної конструкції.

# Невідомі в системі рівнянь рівноваги #

# Підрахунок реакції шарніру С #

# Підрахунок реакції жорсткого затискання В #

Інструкції для визначення впливу активної сили  $P_1$  на реакції складеної конструкції :  $P_1=(10...20)$  кН

### 3. ДИНАМІКА

**Динаміка** – розділ теоретичної механіки, що вивчає механічний рух матеріальних об'єктів (матеріальної точки, системи матеріальних точок, твердого тіла) під дією прикладених до них сил та з урахуванням їх мас.

#### 3.1. Динаміка точки. Теоретичний матеріал

**Закони динаміки (Ньютона). Перший (закон інертності або інерційності):** ізольована матеріальна точка перебуває в стані спокою або прямолінійного рівномірного руху доти, доки вплив зовнішніх сил не виведе її з цього стану.

**Другий (закон інерції):** сила, що діє на матеріальну точку, надає їй прискорення, яке пропорційне величині сили і має напрям сили:  
 $m\vec{a} = \vec{F}$ .

**Третій (закон рівності дії та протидії):** дві матеріальні точки взаємодіють між собою з силами, рівними за величиною і протилежними за напрямом:  $\vec{F} = -\vec{F}'$ .

**Четвертий (закон незалежності дії сил):** якщо на матеріальну точку одночасно діють декілька сил, то прискорення, одержуване точкою, дорівнює геометричній сумі прискорень, які точка одержує від кожної сили зокрема.

**Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки.** Основне рівняння динаміки точки можна записати у вигляді диференціального рівняння:

– **векторна форма:**  $m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  ; або  $m\ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ ,

де  $m$  – маса точки;  $\vec{r}$  - радіус-вектор точки, який є функцією часу;

– **у вигляді проєкцій** на три декартових осі координат  $x, y, z$ :

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix} ; m\ddot{y} = \sum_{i=1}^n F_{iy} ; m\ddot{z} = \sum_{i=1}^n F_{iz} ,$$

– **в натуральній формі:**  $m \frac{dv_{\tau}}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{i\tau} ; m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_{in} ; 0 = \sum_{i=1}^n F_{itb} ,$

де  $v_\tau$  – проекція швидкості на дотичну;  $\rho$  – радіус кривизни траєкторії в даній точці;  $\sum_{i=1}^n F_{i\tau}$ ,  $\sum_{i=1}^n F_{in}$ ,  $\sum_{i=1}^n F_{ib}$  – алгебраїчні суми проекцій сил, що діють на точку, на натуральні осі  $\tau, n, b$ . Цими рівняннями зручно користуватися, коли точка рухається, наприклад, по колу.

**Початкові умови** – величини, що визначають положення точки (її координати) і проекції вектора швидкості на осі координат у деякий фіксований момент часу  $t_0$  (звичайно  $t_0=0$ ):

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0, \quad z|_{t=0} = z_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = v_{0x}, \quad \dot{y}|_{t=0} = v_{0y}, \quad \dot{z}|_{t=0} = v_{0z}.$$

**Дві задачі динаміки точки. Перша або пряма задача динаміки точки** – рух точки та її маса відомі, треба знайти силу, яка діє на точку. Розв'язання першої задачі – знаходження сили за даним законом руху матеріальної точки, зводиться до знаходження прискорення точки. **Друга або обернена задача динаміки точки** – відомі сили, що діють на точку, її маса, а також початкові умови руху. Треба визначити закон руху точки. Розв'язання другої задачі – знаходження закону руху матеріальної точки за даними силами пов'язане з інтегруванням диференціальних рівнянь руху. Загальний розв'язок цих рівнянь визначає координати точки як функції часу і сталі інтегрування.

**Загальні теореми динаміки точки.** Кількістю руху матеріальної точки називається вектор, що дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості:  $\vec{q} = m\vec{v}$ . Елементарним імпульсом сили  $\vec{F}$  називається вектор  $d\vec{S} = \vec{F}dt$ . Імпульсом сили за певний проміжок часу  $\tau$  називається вектор  $\vec{S} = \int_0^\tau \vec{F}dt$ . Проекція імпульсу сили на координатні осі визначається так:

$$S_x = \int_0^\tau F_x dt; \quad S_y = \int_0^\tau F_y dt; \quad S_z = \int_0^\tau F_z dt.$$

**Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки:**  
– в диференціальній формі: перша похідна від кількості руху матеріа-

льної точки за часом дорівнює рівнодійній сил, прикладених до точки

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{R}.$$

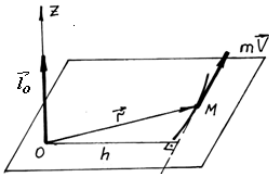
Цю теорему в проекціях на координатні осі можна записати так:

$$\frac{d(mv_x)}{dt} = R_x; \quad \frac{d(mv_y)}{dt} = R_y; \quad \frac{d(mv_z)}{dt} = R_z.$$

– в інтегральній формі: зміна кількості руху матеріальної точки за якийсь проміжок часу  $\tau = t_1 - t_0$  дорівнює імпульсу рівнодійної сили за той самий проміжок часу:  $m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \vec{S}$ , де  $\vec{v}_0, \vec{v}_1$  – швидкість точки у моменти часу  $t_0$  і  $t_1$ , відповідно.

У проекціях на осі декартової системи координат:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = S_x; \quad mv_{1y} - mv_{0y} = S_y; \quad mv_{1z} - mv_{0z} = S_z.$$



**Моментом кількості руху матеріальної точки відносно центра  $O$**  є вектором, що дорівнює векторному добуткові радіуса - вектора точки, початок якого є в точці  $O$ , на кількість руху цієї точки:

$$\vec{l}_0 = \vec{m}_0(\vec{q}) = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Момент кількості руху матеріальної точки відносно координатної осі:

$$l_{0z} = l_z = M_z(\vec{q}) = \pm m q_{xy} h.$$

В проекціях на осі прямокутної системи координат теорему можна записати у вигляді трьох рівнянь:

$$\frac{dq_{\delta}}{dt} = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i); \quad \frac{dq_{\phi}}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{\phi}(\vec{F}_i); \quad \frac{dq_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i).$$

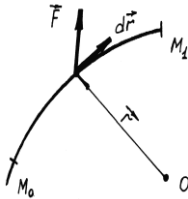
**Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки:** похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центру  $O$  дорівнює моменту рівнодійної сил, прикладених до цієї точки, відносно того ж центра:  $\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{R})$ .

Отже похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомої осі дорівнює моменту рівнодійної сили

відносно тієї ж осі.

**Кінетичною енергією** матеріальної точки називається скалярна величина, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:  $T = \frac{mv^2}{2}$ .

**Елементарна робота**  $d'A$  сили  $\vec{F}$  на елементарному (нескінченно малому) переміщенні точки прикладення сили  $d\vec{r}$  є скалярною величиною, що визначається за формулою:



$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos(\vec{F}, d\vec{r}).$$

**Робота А** сили  $\vec{F}$  на шляху  $M_0 M_1$ , дорівнює

$$A = \int_{M_0 M_1} d'A = \int_{M_0 M_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0 M_1} F dr \cos(\vec{F}, d\vec{r}).$$

Визначення елементарної і повної роботи сили в аналітичному вигляді:

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz; \quad A = \int_{M_0 M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

**Робота на прямолінійному переміщенні**  $\vec{S}$  точки її прикладення сталої за модулем і напрямком сили  $\vec{F}$  визначається за формулою:  $A = FS \cos(\vec{F}, \vec{S}) = FS \cos \gamma$ .

Розмірність роботи  $[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$ .

**Робота сили тяжіння:**  $A = Ph$ , де  $h = z_0 - z_1$  - різниця висот початкового і кінцевого положення точки.

**Робота сили пружності** при деформації пружини із стану  $x_1$  до стану  $x_2$  дорівнює:  $A = c \cdot (x_1^2 - x_2^2) / 2$ .

**Теорема про зміну кінетичної енергії точки:**

– у диференціальній формі: диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, прикладених до точки:

$$dT = d(mv^2 / 2) = d'A;$$

– в інтегральній формі: приріст кінетичної енергії матеріальної точки



на скінченній ділянці шляху дорівнює роботі рівнодійної всіх сил, прикладених до точки, на тій самій ділянці шляху:  $mv_l^2 / 2 - mv_o^2 / 2 = A$ , де  $v_l$  - швидкість точки в кінці пройденого шляху;  $v_o$  - швидкість точки на початку шляху (початкова швидкість);  $A = \sum_{i=1}^n A_i$  - алгебраїчна сума робіт усіх сил, прикладених до точки, на пройденому шляху.

**Принцип Даламбера для матеріальної точки.** Сила інерції матеріальної точки  $\vec{\Phi}$  за величиною дорівнює добутку маси точки на величину її прискорення і напрямлена протилежно вектору прискорення точки:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}.$$

При русі точки по кривій силу інерції можна подати як суму двох складових:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau, \quad \vec{\Phi}_n = -m\vec{a}_n; \quad \Phi_n = m \frac{v^2}{\rho}; \quad \vec{\Phi}_\tau = -m\vec{a}_\tau; \quad \Phi_\tau = m \frac{dv}{dt}.$$

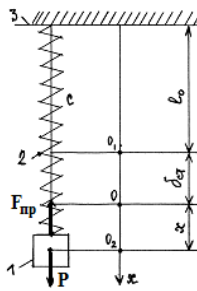
**Принцип Даламбера для невільної матеріальної точки:** при русі матеріальної точки активні сили і реакції в'язей, а також сила інерції матеріальної точки, якщо її умовно прикласти, являють собою зрівноважену систему сил:

$$\vec{F}^a + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0,$$

де  $\vec{F}^a$ ,  $\vec{N}$  - рівнодійні активних сил та реакцій в'язей;  $\vec{\Phi}$  - сила інерції точки.

**Прямолінійні коливання матеріальної точки.** Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються механічними коливаннями. При цьому на матеріальну точку можуть діяти поновлюючі сили (сили, що намагаються повернути точку в положення рівноваги), сила опору руху, яка залежить від швидкості точки, та зовнішня збурююча сила.

На рисунку показано вантаж (матеріальну точку) масою  $m$ , який здійснює прямолінійні коливання у напрямку осі  $Ox$ .



Тут: 1 – вантаж; 2 – пружина; 3 – нерухома основа,  $l_0$  – довжина недеформованої пружини;  $\delta_{\text{ст}}$  – статична деформація пружини під дією вантажу;  $x$  – поточна координата вантажу відносно положення статичної рівноваги при його русі.  $\vec{P}$  – сила тяжіння вантажу;  $\vec{F}_{\text{пр}}(x)$  – сила пружності пружини, точка  $O$  – положення статичної рівноваги вантажу (початок відліку координати  $x$ ); точка  $O_1$  – положення вільного кінця недеформованої пружини; точка  $O_2$  – поточне положення вантажу на  $Ox$ .

Рух точки здійснюється по прямій, яка співпадає з сумісною лінією дії вказаних сил. Залежно від комбінації цих сил розрізняють наступні види коливального руху: *вільні та вільні затухаючі коливання, вимушені коливання*

**Вільні коливання.** Це коливання, які відбуваються під дією тільки поновлюючої сили, величина якої пропорційна відхиленню матеріальної точки від положення її статичної рівноваги. Сила пружності пружини є різновидністю поновлюючої сили:  $F_{\text{пр}} = -c \cdot \Delta$ , де  $\Delta = \delta_{\text{ст}} + x$  - повна деформація пружини;  $c$  - коефіцієнт жорсткості (пружності) пружини.

Основне рівняння динаміки вантажу має вигляд:  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{пр}}$ ,

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{\text{ст}} + x),$$

де  $\ddot{a}, \ddot{o}$  – прискорення вантажу.

У положенні статичної рівноваги вантаж 1 є нерухомий, координата  $x = 0$ , а сила тяжіння ( $P = mg$ ) урівноважується силою пружності пружини, яка дорівнює  $P = F_{\text{пр}}$ , тобто  $mg = c \delta_{\text{ст}}$ , а тому диференціальні рівняння руху вантажу приймають вигляд:  $m\ddot{x} + cx = 0$ , або  $\ddot{x} + k^2x = 0$ , де  $k = \sqrt{c/m}$  - кругова (циклічна, власна) частота коливань вантажу (матеріальної точки).

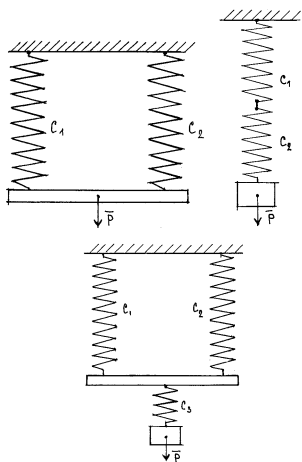
**Закон вільних коливань вантажу (матеріальної точки)** відповідає гармонійному коливальному руху:

$$x = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt = A \sin(kt + \varphi_0).$$

При відомих  $x_0, \dot{x}_0$  - початкових положенні та швидкості вантажу ( $t = 0$ ) знайдемо постійні інтегрування  $C_1 = x_0$ ,  $C_2 = \dot{x}_0 / k$ . Так що амплітуду й початкову фазу коливань точки можна визначити так:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \frac{x_0 \cdot k}{\dot{x}_0}.$$

Пружини, які з'єднують вантаж з основою, можуть утворювати систему паралельно, послідовно і паралельно-послідовно з'єднаних пружних елементів. У цьому випадку подані на рисунках вихідні механічні схеми необхідно методом еквівалентних перетворень звести до розрахункової схеми з одним пружним елементом, який має еквівалентну жорсткість  $c_e$ .



Еквівалентна пружина на розрахунковій схемі при паралельному з'єднанні пружних елементів буде мати жорсткість:

$$c_e = c_1 + c_2,$$

при послідовному з'єднанні:

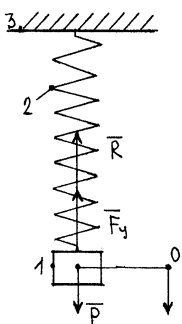
$$c_e = c_1 \cdot c_2 / (c_1 + c_2),$$

а при змішаному з'єднанні:

$$c_e = (c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3) / (c_1 + c_2 + c_3).$$

**Затухаючі вільні коливання матеріальної точки.** При русі в середовищі (рідині), а також при деформації реальних пружин на матеріальну точку діє сила опору. При малих швидкостях руху силу опо-

ру можна вважати прямо пропорційною швидкості точки:  $\vec{R}(\vec{v}) = -\beta \vec{v}$ , де  $\beta$  – коефіцієнт опору руху.



Диференціальне рівняння руху вантажу буде мати вигляд:

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{\text{ст}} + x) - \beta\dot{x}.$$

Звідси, маємо:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

де  $n = \beta / 2m$  – коефіцієнт демпфування коливань;  $k = \sqrt{c / m}$ .

Характер руху вантажу істотним чином залежить від співвідношення  $n$  і  $k$ .

**Закон затухаючих вільних коливань вантажу (матеріальної точки)** у випадку малого опору ( $n < k$ ) має затухаючий коливальний характер:  $x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \varphi_0)$ , де  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$  – частота затухаючих коливань;  $C_1 = x_0$ ;  $C_2 = (\dot{x}_0 + nx_0) / k_1$  – сталі інтегрування; початкові амплітуда і фаза коливань точки:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2}}; \quad \varphi_0 = \arctg \frac{x_0 \cdot k_1}{\dot{x}_0 + nx_0};$$

Період затухаючих коливань  $T_1 = 2\pi / k_1$ . Амплітуда коливань  $Ae^{-nt}$  з часом спадає за експоненціальним законом до нуля. Для характеристики процесу згасання вводять поняття декременту згасаючих коливань як відношення двох сусідніх амплітуд:

$$\delta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{A_i}{A_2} = \frac{Ae^{-nt}}{Ae^{-n(t+T_1)}} = e^{nT_1}.$$

**Логарифмічний декремент** згасаючих коливань:  $\ln(\delta) = nT_1$ .

При  $n > k$  (випадок великого опору) закон руху вантажу буде **аперіодично затухаючий**:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \text{ де } C_1 = \frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}; C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}; \lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

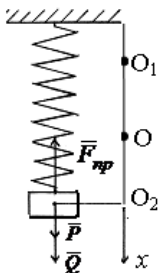
*При аперіодично затухаючому русі* координата  $x$  вантажу при  $t \rightarrow 0$  монотонно зменшується, а вантаж наближається до положення статичної рівноваги ( $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

*Гранично аперіодичний рух* (граничний випадок) має місце при  $n = k$ . Тут закон руху вантажу буде:  $x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t)$ , де  $C_1 = x_0$ ;  $C_2 = \dot{x}_0 + n \cdot x_0$ .

*Механічна система без сил опору називається консервативною, а з силами опору – дисипативною.* У першому випадку повна енергія – сума кінетичної та потенціальної енергій - у кожний момент часу дорівнює початковій енергії:  $T + \Pi = E_0$  ( $T - A = E_0$ ), а у другому – перша похідна повної енергії за часом зменшується:  $\frac{dE}{dt} \leq 0$  ( $E \Rightarrow 0$ ).

*Вимушені коливання* (силове збудження коливань). Розглянемо випадок консервативної системи:  $\vec{F}_{np} \neq 0$ ;  $\beta = 0$ ;  $\vec{R}(\vec{v}) = 0$ . При силовому збудженні коливань збурююча сила  $\vec{Q}$  прикладена безпосередньо до матеріальної точки (вантаж) та змінюється за гармонійним законом  $Q_x = H_0 \cdot \sin \omega t$ .

Диференціальне рівняння руху вантажу має



вигляд:

$$x + k^2 x = H_1 \sin \omega t,$$

$$\text{де } H_1 = H_0 / m, k = \sqrt{c / m}.$$

Закон коливання вантажу:

$$x = C_1 \cos kt + C_2' \sin kt + \frac{H_1}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t,$$

$$\text{де } C_1 = x_0; C_2' = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{H_1 \cdot \omega}{k(k^2 - \omega^2)}.$$

Закон руху вантажу істотно залежить від співвідношення величин  $k$  (власної частоти консервативної системи) і  $\omega$  (частоти збу-

рюючої сили). Якщо  $k < \omega$  або  $k > \omega$ , то закон коливань вантажу бігармонійний (двочастотний). Відбувається накладення вільних коливань консервативної механічної системи на її коливання з частотою збурюючої сили. При цьому амплітуда і початкова фаза вільних коливань вантажу залежить одночасно і від початкових умов –  $x_0, \dot{x}_0$  вантажу, параметрів  $H, \omega$  збурюючої сили, і від механічних характеристик –  $m, c$  самої системи.

**Биття.** У випадку близькості частоти збурюючої сили до частоти власних коливань ( $k \approx \omega$ ), виникає явище биття, при якому закон коливань вантажу перетворюється. Наприклад, при нульових початкових умовах ( $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ ) закон коливань вантажу перетворюється наступним чином:

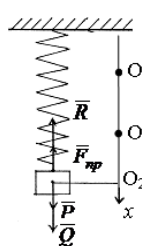
$$x = \frac{2H_0}{m(k^2 - \omega^2)} \cdot \sin\left(\frac{\omega - k}{2} \cdot t\right) \cdot \cos \omega t.$$

Такий рух називається биттям, тобто це коливальний рух, який відбувається з частотою  $\omega$  збурюючої сили та амплітудою, яка є періодичною функцією часу з частотою  $(\omega - k)/2$ .

**Резонанс.** При  $\omega = k$  в системі настає явище резонансу. В консервативній системі амплітуда вимушених коливань вантажу з часом безмежно зростає та вантаж коливається за законом:

$$x = x_0 \cdot \cos \omega t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + \frac{H_0}{2\omega^2}\right) \cdot \sin \omega t - \frac{H_0}{2\omega} t \cdot \cos \omega t.$$

Явище резонансу може служити причиною руйнування конструкцій.



Для дисипативної системи, коли  $\vec{F}_{np}(x) \neq 0$ ;  $\beta \neq 0, \vec{R}(\vec{v}) \neq 0$  та  $n < k$  диференціальне рівняння руху вантажу має вигляд:  $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = H_1 \sin \omega t$ , де  $H_1 = H_0 / m$ ;  $n = \beta / (2m)$ ,  $k = \sqrt{c / m}$ . При заданих початкових умовах  $x_0, \dot{x}_0$  вантаж здійснює коливання за законом:

$$x = e^{-nt} (C'_1 \cos k_1 t + C'_2 \sin k_1 t) + \frac{H_1}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$\text{де } k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}; \quad \varphi_0 = -\arctg \frac{\beta \cdot \omega}{c - m\omega^2} = -\arctg \frac{2n \cdot \omega}{k^2 c - \omega^2};$$

$$C'_1 = x_0 - \frac{H_1}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \sin \varphi_0;$$

$$C'_2 = \frac{\dot{x}_0 + x_0 n}{k_1} - \frac{n \sin \varphi_0 + \omega \cos \varphi_0}{k_1} \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}.$$

Коливання вантажу є двочастотними: відбуваються одночасно як з частотою  $k_1$  вільних коливань дисипативної системи, так і з частотою  $\omega$ . Наявність множника  $e^{-nt}$  у першому доданку призводить до швидкого затухання коливального руху вантажу з частотою  $k_1$ . Проте вимушені коливання з частотою збурюючої сили відбуваються постійно, незалежно від часу, з амплітудою  $A_B = H_0 / \left( (c - m\omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2 \right)^{1/2}$  і зсувом фаз  $\varphi_0$ , величини яких визначаються конкретним значенням частоти  $\omega$ . Якщо значення частоти збурюючої сили дорівнює  $\omega = \sqrt{k^2 - 2n^2}$ , а параметри механічної систем задовольняють нерівності  $0 < \zeta < 0,707$ , де  $\zeta = n/k$  - відносне демпфування, то амплітуда вимушених коливань вантажу буде найбільшою:  $A_{B\max} = H_0 / \left( 2c \cdot \zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right)$ . При  $\omega = k$  в системі наступає явище резонансу. Однак, на відміну від консервативної системи, амплітуда вимушених коливань вантажу в дисипативній системі необмежено не зростає, а приймає кінцеве значення, яке дорівнює  $A_{B\text{рез}} = H_0 / 2c \cdot \zeta$ .

### **Питання для самоконтролю**

1. Під дією яких сил матеріальна точка здійснює коливання?
2. Які коливання матеріальної точки називають вільними?
3. У чому полягає властивість ізохронності вільних коливань?
4. Який вплив в'язкого опору на вільні коливання матеріальної точки?
5. Як формулюють умови аперіодичного руху матеріальної точки?
6. Який вид має диференціальне рівняння власних коливань?
7. Від яких параметрів залежить частота власних коливань системи?
8. Який вид має диференціальне рівняння затухаючих власних коливань?
9. Який вид має диференціальне рівняння змушених коливань системи?
10. За яких умов виникають явища биття та резонансу?
11. За якою формулою визначають максимальне значення амплітуди змушених коливань?
12. За яким законом змінюється амплітуда змушених коливань системи у випадку резонансу?
13. Напишіть диференціальне рівняння резонансних коливань системи.

### **3.2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1**

#### **Комп'ютерне та аналітичне моделювання динаміки точки**

**Ціллю роботи** є вивчення закономірностей руху, вільних та вимушених коливань матеріальної точки.

**Об'єктом досліджень** є матеріальна точка, що рухається вздовж направляючої або у просторі.

**Предметом досліджень** є властивості рівнянь та закономірності рухів, вільних та вимушених коливань матеріальної точки.

**Методи досліджень** містять аналітичне та комп'ютерне моделювання.

**Аналітичне моделювання вільних коливань матеріальної точки.** Розглянемо рух тіла, яке з'єднано з демпфером й закріплено за допомогою трьох пружин 1, 2, 3 (рис. 3.1). Тіло приймається за матері-



альну точку.

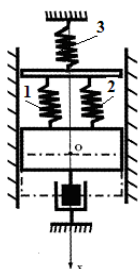
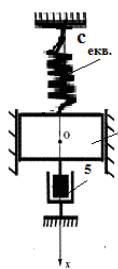


Рисунок 3.1



Маса тіла  $m = 400 \text{ кг}$ , жорсткості пружин, відповідно дорівнюють —  $c_1 = 20 \text{ кН/м}$ ,  $c_2 = 8 \text{ кН/м}$ ,  $c_3 = 12 \text{ кН/м}$ , модуль сили в'язкого опору  $\vec{R}$  демпферу 5 пропорційн швидкості руху:  $|\vec{R}| = \beta v$ . У початковий момент часу тіло 4 зрушили на відстань  $x_0 = 0,2 \text{ м}$  від положення статичної рівноваги й надали початкову швидкість  $v_0 = 0,9 \text{ м/с}$  в напрямку осі  $Ox$ , як вказано на рис. 3.1.

**Комп'ютерне моделювання вільних коливань матеріальної точки при дії сили в'язкого опору.** При комп'ютерному моделюванні визначимо закономірності вільних коливань точки в залежності від значення коефіцієнту опору  $\beta$  та вимушених коливань при дії гармонійної сили. Для вирішення задачі про вільні коливання за допомогою комплексу КІДИМ необхідно записати диференціальне рівняння руху матеріальної точки й сформулювати початкові умови руху.

Розглянемо вихідний файл, зміст якого надано нижче.

| Інструкції та розрахункові залежності  | Коментарі   |
|--|---|
| <p>РАБОТА:=№1.1 СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ.СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ:<br/>(beta=0);<br/>ВЫПОЛНИЛ :=студент Сидоров А.А., гр.<br/>ИТ-10 а;<br/>РИСУНОК:=ris_d1.bmp;<br/>J.x=m;<br/>P.x=-beta*x't-c*x+Fa*sin(omega*t);<br/>m=4000; beta0=4000;Fa0=m*g;omega0=12;<br/>c1=20000; c2=8000; c3=12000;<br/>c=c1*(c2+c3)/(c1+c2+c3);<br/>v0=0.9; x0=0.2; k=sqrt(c/m); n=beta/(2*m);<br/>k1=sqrt(k^2-n^2);<br/>Tc=2*PI/k; T1=2*PI/k1; Lgdk=n*T1;<br/>T0=0.5*m*v0^2; П0=0.5*c*x0^2;</p> | <p># Лабораторна робота №1.<br/>Динаміка точки #</p> <p>J.x - коефіцієнт інерції,<br/>P.x – сили, що діють на тіло;<br/>Вихідні параметри<br/>Підрахування еквівалентної жорсткості пружини</p> <p>Кінетична, потенціальна та</p> |

|   |   |
|---|---|
| <p> <math>E_0 = T_0 + \Pi_0</math>;<br/> <math>T = 0.5 * m * (x')^2</math>; <math>\Pi = 0.5 * c * x^2</math>; <math>E = T + \Pi</math>;<br/> <math>T' = m * x' * x''</math>; <math>N = (-\beta * x' - c * x + F_a * \sin(\omega * t)) * x'</math>;<br/> <math>T_k = (col + 1) * T_c</math>; <math>F_a = 0</math>; <math>\omega = 0</math>;<br/> <math>\beta = 0</math>; <math>col = 5</math>;<br/> НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ: <math>t(0), x(x_0), x'(v_0)</math>;<br/> КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ: <math>t(T_k)</math>;<br/> ПЕЧАТАТЬ: <math>x, x'(x)</math>;<br/> СРАВНИТЬ: частоты <math>(k, k_1, n)</math>, периоды <math>(T_c, T_1, L_{gdk})</math>,<br/> изменение кинетической энергии <math>(T', N)</math>,<br/> полная энергия <math>(E_0, E, T, \Pi)</math>;<br/> РАСЧЕТ: ПЕЧАТАТЬ УРАВНЕНИЙ;<br/> РАБОТА: №1.2 СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ: <math>(\beta = \beta_0/4)</math>;<br/> <math>F_a = 0</math>; <math>\omega = 0</math>; <math>\beta = \beta_0/4</math>; <math>col = 4.605/L_{gdk}</math>;<br/> #Количество колебаний #<br/> РАСЧЕТ: ПЕЧАТАТЬ УРАВНЕНИЙ;<br/> РАБОТА: №1.3 СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ: <math>(\beta = \beta_0)</math>;<br/> <math>F_a = 0</math>; <math>\omega = 0</math>; <math>\beta = \beta_0/4</math>; <math>col = 4.605/L_{gdk}</math>;<br/> РАСЧЕТ: ПЕЧАТАТЬ УРАВНЕНИЙ;<br/> РАБОТА: №1.4 АПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ: <math>(k = n)</math>;<br/> <math>F_a = 0</math>; <math>\omega = 0</math>; <math>\beta = 1.99 * m * k</math>;<br/> <math>col = 4.605/L_{gdk}</math>;<br/> РАСЧЕТ: ПЕЧАТАТЬ УРАВНЕНИЙ;<br/> РАБОТА: №1.5 ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ:<br/> <math>F_a = F_a0</math>; <math>\omega = \omega_0</math>; <math>\beta = \beta_0</math>;<br/> <math>col = 4.605/L_{gdk}</math>;<br/> РАСЧЕТ: ПЕЧАТАТЬ УРАВНЕНИЙ;<br/> РАБОТА: №1.6 РЕЗОНАНС: <math>(k = \omega)</math>;<br/> <math>F_a = F_a0</math>; <math>\omega = k</math>; <math>\beta = 0</math>; <math>col = 55</math>;<br/> РАСЧЕТ: ПЕЧАТАТЬ УРАВНЕНИЙ;<br/> РАБОТА: №1.7 БИЕНИЕ: <math>(k &lt; \omega)</math>;<br/> <math>F_a = F_a0</math>; <math>\omega = 0.9 * k</math>; <math>\beta = 0</math>; <math>col = 19</math>;<br/> РАСЧЕТ: ПЕЧАТАТЬ УРАВНЕНИЙ;<br/> КОНЕЦ; </p> | <p> повна енергії, потужність сил </p> <p> Завдання до досліджень:<br/> 1 – Власні коливання (випадок відсутності в'язкого опору) </p> <p> Завдання до досліджень:<br/> 2 – Вільні затухаючі коливання (випадок впливу в'язкого опору) <math>\beta = 0.25\beta_0</math> </p> <p> 3 – Вільні затухаючі коливання (випадок впливу в'язкого опору) <math>\beta = \beta_0</math> </p> <p> 4 – Вільні аперіодичні коливання (випадок суттєвого впливу опору) </p> <p> 5 – Вимушені коливання (випадок дії гармонійної сили <math>F = F_a \sin \omega t</math>) </p> <p> 6 - Резонанс (вимушені коливання при рівних частотах <math>\omega = k</math>) </p> <p> 7 - Биття (вимушені коливання при близьких частотах <math>\omega = 0.9 * k</math>) </p> |
|---|---|

### 3.3. Динаміка матеріальної системи та твердого тіла.

#### Теоретичний матеріал

**Система матеріальних точок** (матеріальна система) – це сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємообумовлені. **Абсолютно тверде тіло** уявляє собою систему матеріальних точок, які неперервно заповнюють певний об'єм простору таким чином, що відстань між будь-якими двома його точками залишається незмінною. Сили, які діють на матеріальну систему, поділяються на *внутрішні* –  $\vec{F}_k^i$  та *зовнішні* –  $\vec{F}_k^e$ . *Внутрішні сили* – це сили взаємодії між точками самої матеріальної системи. *Зовнішні сили* – це сили, які діють на точки системи з боку інших точок, які не належать даній матеріальній системі. Внутрішні сили діють на матеріальну систему попарно як дія і протидія ( $\vec{F}_k^i = -\vec{F}_{k+1}^i$ ), так що геометрична сума внутрішніх сил або головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю, та геометрична сума моментів внутрішніх сил відносно будь-якого центра або головний момент внутрішніх сил і алгебраїчна сума моментів сил відносно осі дорівнюють нулю:

$$\vec{F}^i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0; \quad \vec{M}_O^i = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^i) = 0; \quad M_z^i = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Абсолютно тверде тіло – це приклад *незмінної матеріальної системи*, в якій відстань між точками прикладення внутрішніх сил залишається незмінною.

**Центр мас матеріальної системи** характеризує розподіл мас по об'єму та є геометричною точкою, радіус-вектор якої обчислюється за виразом:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{M},$$

де  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k$  – маса матеріальної системи,  $\vec{r}_k$  – радіус-вектор положення кожної  $k$ -тої точки системи відносно фіксованої у просторі точки  $O$ . Центр мас матеріальної системи у проекціях на осі координат  $x, y, z$  визначається так:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M},$$

де  $x_k, y_k, z_k$  – координати окремих точок матеріальної системи. У однорідному силовому полі Землі центр мас матеріальної системи збігається з його центром ваги.

**Моменти інерції тіла** характеризують розподіл мас по об'єму тіла та розрізняються на осьові, полярні, відцентрові моменти інерції з одиницею виміру –  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ :

– **осьовий момент інерції тіла** (системи матеріальних точок) характеризує міру інертності тіла при обертовому русі відносно координатної осі та є завжди додатною величиною, яка дорівнює сумі добутків мас окремих точок системи  $m_k$  на квадрати їх відстаней до цієї осі:

$$J_x = \sum_{k=1}^n m_k h_{kx}^2, \quad J_y = \sum_{k=1}^n m_k h_{ky}^2, \quad J_z = \sum_{k=1}^n m_k h_{kz}^2.$$

Якщо тіло суцільне або має неперервний розподіл маси, то момент інерції твердого тіла визначається інтегралом, поширеним на всю його масу:

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm, \quad J_y = \int_{(M)} (z^2 + x^2) dm, \quad J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm.$$

– **полярний момент інерції тіла** (системи матеріальних точок)  $J_o$  є сума добутків мас точок тіла  $m_k$  на квадрати їх відстаней  $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) до полюса  $O$ :

$$J_o = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2), \quad J_x + J_y + J_z = 2J_o.$$

– **відцентровий момент інерції тіла** (системи матеріальних точок) характеризує асиметричність розподілу мас при обертальному русі:

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k, \quad J_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k, \quad J_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k.$$

Для суцільного тіла з неперервним розподілом маси операції суми замінюються інтегралом:  $J_{xy} = \int_M xy dm$ ,  $J_{xz} = \int_M xz dm$ ,  $J_{yz} = \int_M yz dm$ .

Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю і мати додатний або від'ємний знак.

**Головною віссю інерції тіла** називається вісь  $Oz$ , для якої відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю ( $J_{xz} = 0$ ,  $J_{yz} = 0$ ). Вісь симетрії тіла є головною віссю інерції. Якщо всі три відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю:  $J_{xy} = 0$ ,  $J_{xz} = 0$ ,  $J_{yz} = 0$ , то кожна з координатних осей є головною віссю інерції даного тіла для точки  $O$  початку координат. Моменти інерції тіла відносно головних осей інерції є **головними моментами інерції**.

**Центральною** називається довільна вісь, яка проходить через центр мас тіла. Головна вісь інерції, яка проходить через центр мас, є **головною центральною віссю інерції**. Моменти інерції маси тіла відносно цих осей називаються **головними центральними моментами інерції тіла**.

**Радіус інерції тіла**  $\rho_z$  – це лінійна величина, добуток квадрату якої на масу тіла  $M$  визначає осьовий момент інерції маси тіла, наприклад, відносно координатної осі  $z$ :  $J_z = M \cdot \rho_z^2$ .

**Теорема Гюйгенса про моменти інерції маси тіла:** момент інерції маси тіла відносно осі  $Z$  дорівнює сумі моменту інерції маси тіла відносно паралельної осі –  $Z_C$ , яка проходить через центр мас –  $C$ , і добутку маси тіла  $M$  на квадрат відстані між осями –  $d$ :  $J_Z = J_{ZC} + M \cdot d^2$ .

### Приклади обчислювання моментів інерції тіл простої форми

| Види тіл   | Осьові моменти інерції                             |
|--|--|
| Однорідний тонкий стержень довжиною $l$ та масою $M$ обертається навколо центральної осі $z_c$ або осі $z$ , яка проходить через його кінець.              | $J_z = \frac{M l^2}{3}; J_{zc} = \frac{M l^2}{12}$ |
| Однорідне тонке кільце радіуса $R$ або тонка циліндрична труба, маховик обертаються навколо центральної осі $z$ перпендикулярній площині кільця.           | $J_z = MR^2; J_x = J_y = \frac{MR^2}{2}$           |
| Кругла однорідна пластина або однорідний циліндр радіуса $R$ обертається навколо центральної осі $z$ .   | $J_z = \frac{MR^2}{2}; J_x = J_y = \frac{MR^2}{4}$ |
| Прямий коловий однорідний конус масою $M$ і радіусом основи $R$ обертається навколо центральної осі $z$ , яка проходить крізь вершину і центр кола основи. | $J_z = 0.3MR^2$                                    |
| Однорідна куля радіуса $R$ обертається навколо центральних осей $x, y, z$ .  | $J_z = J_x = J_y = 0.4MR^2$                        |

**Міри механічного руху і міри дії сил.** До мір механічного руху відносять наступні характеристики їхньої інертності й руху: кількість руху точки й системи, кінетичний момент (момент кількості руху) точки й системи відносно точки й осі, кінетична енергія точки й системи.

**Кількість руху матеріальної точки** – це векторна характеристика руху точки, яка дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості:  $\vec{q} = m\vec{v}$ , кг м/с, його напрямок збігається з напрямком вектора швидкості  $\vec{v}$ . **Кількість руху матеріальної системи** дорівнює гео-

метричній сумі векторів кількостей руху окремих точок системи:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n \vec{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k, \text{ кг м/с.}$$

**Вектор кількості руху матеріальної системи** або головний вектор кількості руху системи дорівнює добутку маси усієї системи на вектор швидкості її центра мас:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = M \vec{v}_c; \quad Q_x = M v_{cx}, \quad Q_y = M v_{cy}, \quad Q_z = M v_{cz};$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}; \quad \cos\left(\hat{\vec{Q}}, x\right) = Q_x / Q, \cos\left(\hat{\vec{Q}}, y\right) = Q_y / Q, \cos\left(\hat{\vec{Q}}, z\right) = Q_z / Q.$$

**Теорема про зміну кількості руху** матеріальної системи у диференціальній формі: похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної системи дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, які

діють на матеріальну систему: 
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e.$$

**Закон збереження кількості руху матеріальної системи:** якщо геометрична сума всіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну

систему, дорівнює нулю –  $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0$ , то головний вектор кількості

руху системи залишається незмінним:  $\vec{Q} = \text{const.}$

**Теорема про рух центра мас:** центр мас системи матеріальних точок рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил –  $M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e.$

шніх сил –  $M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e.$

**Моментом кількості руху ( $m\vec{v}$ ) матеріальної точки відносно центра  $O$**  названо вектор  $\vec{l}_{ok}$ , який дорівнює добутку  $\vec{l}_{ok} = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$  і спрямований у той бік, звідки здається, що вектор ( $m\vec{v}$ ) намагається повернути цю площину відносно центра  $O$  проти ходу годинникової стрілки (правило свердлика).

**Головним або кінетичним моментом матеріальної системи відносно будь-якого центра** є вектор  $\vec{L}_O$ , який дорівнює геометричній сумі векторів  $\vec{l}_{Ok}$  моментів кількості руху усіх точок системи

відносно цього центра:

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^n \vec{l}_{Ok} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k).$$

**Кінетичним або головним моментом кількості руху механічної системи відносно будь-якої осі Z** є алгебраїчна сума моментів  $l_{zk}$  кількості руху усіх точок системи відносно осі Z:

$$L_z = \sum_{k=1}^n l_{zk} = \sum_{k=1}^n M_z (m_k \vec{v}_k).$$

**Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання Z** дорівнює добутку осьового моменту інерції маси тіла відносно осі на кутову швидкість тіла:  $L_z = I_z \omega$ .

**Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи:** похідна за часом від кінетичного моменту  $\vec{L}_O$  матеріальної системи відносно будь-якого центра  $O$  дорівнює головному моменту

всіх зовнішніх сил відносно того ж центра:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O (\vec{F}_k^e).$$

Проектуючи останній вираз на осі координат, отримаємо, що похідна за часом від кінетичного моменту матеріальної системи відносно нерухомої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють на систему, відносно цієї осі:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e); \quad \frac{dL_x}{dt} = \sum_{k=1}^n m_x (\vec{F}_k^e); \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_{k=1}^n m_y (\vec{F}_k^e).$$

**Закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи:** якщо головний момент зовнішніх сил, які діють на систему, відносно будь-якого центра  $O$  дорівнює нулю –  $\sum_{k=1}^n \vec{m}_O (\vec{F}_k^e) = 0$ , то кінетичний момент матеріальної системи відносно цього центра зберігає своє значення:

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O (m_k \vec{v}_k) = \text{const}.$$



**Кінетичною енергією** називають фізичну величину, яка є скалярною мірою механічного руху в нерухомій системі координат при переході однієї форми руху в іншу, наприклад, механічної в теплову тощо. Повна механічна енергія  $E$  дорівнює сумі кінетичної  $T$  і потенціальної  $P$  енергій:  $E=T+P$ .

**Кінетичною енергією точки** називають скалярну величину, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат швидкості –  $T = mv^2 / 2$ , Н.м (Дж), та є величиною додатною.

**Кінетична енергія матеріальної системи** – це скалярна величина, яка дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій

окремих точок, що складають систему:  $T = \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 / 2$ .

**Кінетична енергія тіла, яке рухається поступально**, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості довільної точки або центра мас:  $T = Mv^2 / 2$ , де  $M$  – маса тіла,  $v$  – його швидкість (при поступальному русі швидкості усіх точок однакові). **Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі** з кутовою швидкістю  $\omega$ , дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі

обертання на квадрат кутової швидкості:  $T = \frac{J_z \omega^2}{2}$ , де  $J_z$  – момент

інерції тіла відносно осі обертання (міра інертності тіла при обертальному русі). **Кінетична енергія тіла, яке рухається плоско-**

**паралельно**, дорівнює сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху навколо центра мас:  $T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{J_{zC} \omega^2}{2}$ .

**Робота сил тяжіння** на переміщенні точки з положення  $M_1$  в положення  $M_2$ , якщо  $z_1 - z_2 = h$ , дорівнює:  $A = mgh$ .

**Робота сили пружності**, якщо вона відповідає закону Гука ( $F_{пр} = cx$ ), дорівнює половині добутку коефіцієнта пружності на квадрат переміщення її точки прикладання, яке відрховується від положення недеформованого стану:  $A = \frac{c}{2} (x_{пoc}^2 - x_{кин}^2)$ . Робота сили пружно-

сті від'ємна тому, що вектор сили пружності завжди спрямований протилежно переміщенню її точки прикладання. **Робота сил тертя**  $P_{\text{тр}}$  на переміщенні  $S$  точки її прикладання з положення  $M_1$  в положення  $M_2$  дорівнює:  $A = -P_{\text{тр}} \cdot S$ , та завжди від'ємна тому, що вектор сили тертя спрямований протилежно переміщенню її точки прикладання.

**Робота постійного моменту** –  $M_z(\vec{P})$ , під дією якого тіло обернеться навколо нерухомої осі  $z$  на кут рівний  $-\varphi$ , дорівнює:  $A = \pm M_z(\vec{P}) \cdot \varphi$ .

**Зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні** дорівнює роботі рівнодійної сили на цьому ж переміщенні. **Зміна кінетичної енергії матеріальної системи на деякому переміщенні** дорівнює алгебраїчній сумі робіт на цьому переміщенні зовнішніх і внутрішніх сил:

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i,$$

де  $\sum_{k=1}^n A_k^e$  – сума робіт зовнішніх сил, що діють на систему;  $\sum_{k=1}^n A_k^i$  – сума робіт внутрішніх сил, які діють між точками системи.

**Зміна кінетичної енергії матеріальної системи** для незмінних механічних систем (деформації яких можна не враховувати,  $\sum_{k=1}^n A_k^i = 0$ ) дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх робіт на цьому переміщенні:

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e.$$

**Стаціонарне силове поле називають потенціальним**, якщо робота сил поля, які діють на матеріальну точку, що рухається, не залежить від форми її траєкторії, а є однозначною функцією координат початкового і кінцевого положень точки.

**Потенційною енергією матеріальної точки** у даному положенні  $M$  називають скалярну величину  $\Pi$ , яка дорівнює тій роботі, яку виконують сили поля при переміщенні точки із положення  $M$  у нульове положення.

**Зовнішні сили називають потенціальними**, якщо проекції сил, що діють на точки консервативної системи  $-F_{xk}, F_{yk}, F_{zk}$  на координатні осі, обчислюються за співвідношеннями:

$$F_{xk} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{yk} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{zk} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad \text{де } \Pi = \Pi(x_k, y_k, z_k) -$$

потенціальна енергія системи.

**Потенціальна енергія механічної системи**, яка перебуває під дією сил тяжіння, дорівнює добутку ваги системи на висоту її центра ваги над нульовою еквіпотенціальною поверхнею:  $\Pi = P \cdot z_c$ .

**Закон збереження механічної енергії** стверджує, що під час руху механічної системи під дією потенціальних сил сума кінетичної і потенціальної енергій системи у кожному її положенні залишається величиною незмінною:

$$T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = \text{const.}$$

**Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла** є диференціальними рівняннями руху центра мас тіла поступального руху твердого тіла:

$$M \ddot{x}_c = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M \ddot{y}_c = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad M \ddot{z}_c = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e, \quad \text{де}$$

$M$  – маса тіла;  $x_c, y_c, z_c$  – координати центра мас;  $F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e$  – проекції зовнішньої  $k$ -тої сили на осі координат.

**Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла**, що під дією прикладених до нього сил  $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots, \vec{F}_n^e$  обертається навколо нерухомої осі  $Z$  з кутовою швидкістю  $\omega$  має наступні форми:

$$J_z \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e), \quad \text{або} \quad J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e), \quad \text{чи} \quad J_z \varepsilon = \sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e).$$

Обертальний рух прискорений  $\varepsilon = \ddot{\phi} > 0$ , якщо  $\sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e) > 0$ , та сповільнений ( $\varepsilon = \ddot{\phi} < 0$ ), якщо  $\sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e) < 0$ . Якщо  $\sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^e) = 0$ , то

$\varepsilon = \ddot{\phi} = 0$  – обертання рівномірне ( $\omega = \text{const}$ ).

*Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла у координатній формі, якщо обрати за полюс центр мас тіла точку С,*

набувають вигляду: 
$$M \ddot{x}_c = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad M \ddot{y}_c = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad J_{zc} \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n F_k^e.$$

### **Питання для самоконтролю**

1. Що називають механічною (матеріальною) системою?
2. Які моменти інерції тіла Вам відомі?
3. В яких одиницях вимірюється момент інерції тіла і що він характеризує?
4. Що таке радіус інерції тіла?
5. Як формулюється теорема Гюйгенса про моменти інерції?
6. Як обчислити моменти інерції стержня, циліндра, кулі, конуса?
7. Як відцентрові моменти інерції тіла характеризують розподіл маси тіла?
8. Які осі в тілі є головними центральними осями?
9. Які міри руху існують щодо тіла, яке рухається?
10. Що таке кількість руху матеріальної точки і системи, яка їх розмірність?
11. Як записується теорема про зміну кількості руху в диференціальній формі?
12. Як формулюється закон збереження кількості руху матеріальної системи?
13. Як визначаються моменти кількості руху матеріальної точки і системи?
14. Що встановлює теорема про зміну кінетичного моменту системи?
15. Як визначити кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання?
16. Як формулюється закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи?
17. Чи можна динаміку поступального руху тіла звести до динаміки точки?
18. Як записується вираз кінетичної енергії точки, тіла і системи?
19. Як обчислюється кінетична енергія тіл, що рухаються поступально, плоско паралельно, і обертаються?
20. Як формулюється закон збереження механічної енергії?

### 3.4. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

#### Комп'ютерні та аналітичні засоби моделювання динаміки тіл

**Ціллю роботи** є вивчення закономірностей і властивостей руху твердого тіла за допомогою комп'ютерних та аналітичних засобів моделювання динаміки тіл, з визначенням реакцій в'язей тіл, які обертаються навколо вертикальної та горизонтальної осі.

**Об'єктом досліджень** є абсолютно тверді тіла, які під дією прикладених до них сил переміщуються у просторі й часі з початкового положення рівноваги в інше.

**Предметом досліджень** є закони руху абсолютно твердих тіл з урахуванням їхніх мас і під дією прикладених до них сил, закономірності зміни у часі мір механічного руху і дії сил: кінетичного моменту, кінетичної та повної енергії, роботи й потужності сил.

**Методи досліджень** містять аналітичне та комп'ютерне моделювання.

**Аналітичне моделювання динаміки тіл.** Розглянемо обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі (фізичний та математичний маятники).

**Фізичним маятником** називають тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі під дією сили ваги. Найчастіше вісь обертання маятника горизонтальна (рис. 3.2). Точку  $O$  перетину осі обертання  $Oz$  з площиною  $Oxy$  руху маятника, яка проходить через центр його ваги  $C$ , називають *точкою підвішування маятника*.

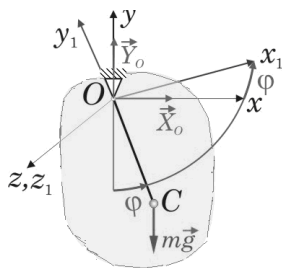


Рисунок 3.2

Кут відхилення маятника, що перебуває під дією сили ваги  $m\vec{g}$ , від вертикалі позначимо  $\varphi$ . Рівняння обертального руху тіла запише-

мо так: 
$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = M_{Oz}(m\vec{g}), \quad \text{або}$$

$J_{Oz}\ddot{\varphi} = -mgh \sin \varphi$ , де  $h$  – відстань від центра мас до точки підвішування  $O$  маятника (рис. 3.3);  $J_{Oz}$  – момент інерції маятника відносно осі  $Oz$ . Далі розглянемо малі коливання маят-

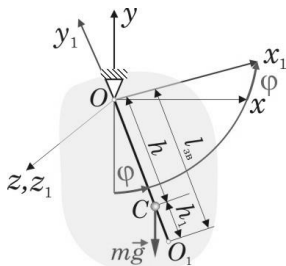


Рисунок 3.3

ника, для яких можна прийняти  $\sin \varphi \cong \varphi$ . Тоді, рівняння руху перепишемо у вигляді:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{J_{Oz}}}, \text{ де } \omega_0 - \text{кругова ча-}$$

стоти власних коливань маятника. Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння матиме вигляд:

$$\varphi = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t, \quad \dot{\varphi} = \omega_0 (C_1 \cos \omega_0 t - C_2 \sin \omega_0 t).$$

Якщо прийняти початкові умови такі, як і для математичного маятника, при  $t = 0$ :  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_{t=0} = 0$ , то  $C_1 = 0$ , а  $C_2 = \varphi_0$  і загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння матиме вигляд:  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_0 t$ .

Період малих коливань фізичного маятника та еквівалентного йому математичного маятника визначається за формулами:

$$T_{ph.m} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{Oz}}{mgh}}, \quad T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l_{36}}{g}}.$$

Зведена довжина фізичного маятника звісно буде рівною  $l_{36} = J_{Oz} / (mh)$ .

Хрiстiан Гюйгенс встановив, що коли від точки підвішування  $O$  по лінії  $OC$  відкласти зведену довжину  $l_{36}$  фізичного маятника, то точка  $O_1$ , яка називається **центром гойдання**, матиме властивість взаємності з точкою підвішування  $O$ . Ця властивість полягає в тому, що коли точку підвішування перенести в центр гойдання  $O_1$ , то точка  $O$  теж стає центром коливання. Дійсно, за теоремою Гюйгенса момент інерції тіла відносно осі  $Oz$  буде:  $J_{Oz} = J_{Cz} + mh^2$ .

Тоді з рисунку 3.3 та з рівності  $l_{36} = \frac{J_{Oz}}{mh}$  є очевидним, що

$$l_{36} = \frac{J_{Cz}}{mh} + h, \quad l_{36} = h_1 + h. \text{ Якщо точку підвішування маятника помісти-}$$

ти в точку  $O_1$ , то нова зведена довжина маятника буде  $l'_{зв} = \frac{J_{Cz}}{mh_1} + h_1$ .

Тоді добуток  $hh_1 = \frac{J_{Cz}}{m} = \frac{m\rho_{Cin}^2}{m} = \rho_{Cin}^2 = const$ , не залежить від вибору

точок  $O$  і  $O_1$ . Тут  $\rho_{Cin}$  – радіус інерції твердого тіла в разі обчислення моменту інерції в точці, що збігається з центром мас  $C$ . Щоб показати, що точка гойдання й точка підвішування знаходяться по різні сторони від центру тяжіння достатньо показати, що  $l_{зв} > h$ . З умови рівності

періодів випливає  $l_{зв} = \frac{J_{Cz}}{mh} + h$ , звідки видно, що  $l_{зв} > h$ . Кінетична,

потенціальна та повна енергії фізичного маятника знайдемо за формулами:  $T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$ ,  $\Pi = -mgh(\cos \varphi - 1)$ ,  $E = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - mgh(\cos \varphi - 1)$ .

**Приклад 1.** Розглянемо фізичний маятник маси  $m$ , який рухається під дією сили ваги  $\vec{G} = m\vec{g}$  в площині рис. 3.4 з кутом відхилення маятника від вертикалі  $\varphi$ . Центр ваги маятника  $C$  знаходиться

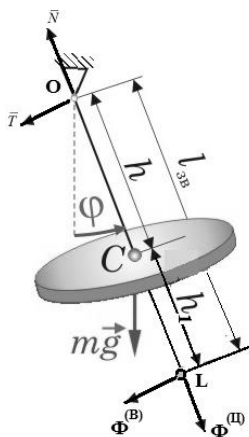


Рисунок 3.4

на відстані  $h$  від осі підвісу  $O$ . Визначити реакції точки  $O$ .

Рівнодіюча сил інерції прикладена в центрі  $L$  коливань маятника; її можна розкласти на відцентрову й обертальну складові, рівні:

$$\Phi^{(Ц)} = mh\dot{\varphi}^2, \quad \Phi^{(B)} = mh\ddot{\varphi}.$$

На тіло фізичного маятника діє плоска система сил  $\vec{\Phi}^{(Ц)}, \vec{\Phi}^{(B)}, \vec{G}, \vec{T}, \vec{N}$ , де  $\vec{G}$  – сила ваги,  $\vec{T}, \vec{N}$  – складові реакції осі  $Oz$ , напрямки яких, прийняті за додатні, зазначені на рисунку.

Основні три рівняння рівноваги мають вигляд:

$$T + mg \sin \varphi + m h \ddot{\varphi} = 0, \quad -N + mg \cos \varphi + m \dot{\varphi}^2 = 0, \quad I_{I_z} \ddot{\varphi} = -mgh \sin \varphi,$$

де  $I_{O_z} = I_C + m h^2 = m \rho_{Cin}^2 + m h^2$ . З останнього рівняння знайдемо:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{gh}{\rho_{Cin}^2 + h^2} \sin \varphi, \quad \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 = \frac{2gh}{\rho_{Cin}^2 + h^2} (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

де  $\dot{\varphi}_0, \varphi_0$  – початкові значення кутової швидкості і кута відхилення маятника; це співвідношення можна одержати також, застосувавши теорему про зміну кінетичної енергії одержуємо:

$$T = -\frac{mg \rho_{Cin}^2}{\rho_{Cin}^2 + h^2} \sin \varphi, \quad N = mg \left( \frac{3h^2 + \rho_{Cin}^2}{\rho_{Cin}^2 + h^2} \cos \varphi - \frac{2h^2}{\rho_{Cin}^2 + h^2} \cos \varphi_0 \right) + m h \dot{\varphi}_0^2.$$

**Приклад 2.** Нехай, маятник являє собою тонкий однорідний стрижень довжиною  $l$ , тоді  $h = l/2$ ,  $\rho_{Cin}^2 = l^2/12$ , отже,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2l} \sin \varphi, \quad \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 = \frac{3g}{2l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Значення реакцій будуть:  $T = -l/4mg \sin \varphi, N = \frac{ml}{2} \dot{\varphi}_0^2 + \left( \frac{5}{2} \cos \varphi - \frac{3}{2} \cos \varphi_0 \right) mg$ .

**Приклад 3.** Тверде тіло у вигляді ротора з диском (рис. 3.5), обертається навколо нерухомої осі  $Z$  під дією моменту  $M_Z = M$ .

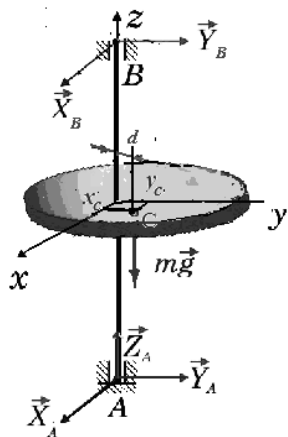


Рисунок 3.5

Центр ваги статично збалансованого ротору знаходиться у центрі диску - точці  $O$ . Визначити додаткові динамічні реакції, що виникають у статично незбалансованому роторі, показаному на рисунку 3.5, якщо його центр мас зміщено від центру вісі на  $\vec{r}_C = x_C \vec{i} + y_C \vec{j}$ .

**Розв'язок.** Виходимо з двох законів динаміки тіла. Рівняння першого і другого законів динаміки твердого тіла мають вигляд:



$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e, \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O,$$

$$\text{або} \quad m\ddot{\vec{r}}_C = \vec{F}^e + \vec{R}_A + \vec{R}_B, \quad (J_Z^O \ddot{\vec{\omega}})^\square = \vec{M}_O^e + \vec{r}_A^O \times \vec{R}_A + \vec{r}_B^O \times \vec{R}_B.$$

Знайдемо проекції  $\ddot{\vec{\omega}}$ ,  $\ddot{\vec{\varepsilon}}$ ,  $\ddot{\vec{r}}_C$ ,  $\ddot{\vec{r}}_A$ ,  $\ddot{\vec{r}}_B$ ,  $\ddot{\vec{r}}_C$  на осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , які зв'язані з тілом. Маємо:  $\ddot{\vec{\omega}} = \dot{\phi}\vec{k}$ ,  $\ddot{\vec{\varepsilon}} = \dot{\phi}\vec{k}$ ,  $\dot{\vec{i}} = \ddot{\omega} \times \vec{i} = \dot{\phi}\vec{k} \times \vec{j} = \dot{\phi}\vec{j}$ ,  $\dot{\vec{j}} = \ddot{\omega} \times \vec{j} = -\dot{\phi}\vec{i}$ ,  
 $\ddot{\vec{r}}_C = \ddot{\vec{\varepsilon}} \times \vec{r}_C + \ddot{\vec{\omega}} \times (\ddot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_C) = (-\ddot{\phi}y_C - \dot{\phi}^2 x_C)\vec{i} + (\ddot{\phi}x_C - \dot{\phi}^2 y_C)\vec{j}$ ,

$$\vec{L}_O = J_Z^O \ddot{\vec{\omega}} = J_{xz}^O \dot{\phi}\vec{i} + J_{yz}^O \dot{\phi}\vec{j} + J_z^O \dot{\phi}\vec{k}, \quad \vec{L}_O^\square = \dot{\vec{L}}_O + \ddot{\vec{\omega}} \times \vec{L}_O,$$

$$\vec{L}_O^\square = (J_{xz}^O \ddot{\phi}\vec{i} + J_{yz}^O \ddot{\phi}\vec{j} + J_z^O \ddot{\phi}\vec{k}) + \ddot{\vec{\omega}} \times (J_{xz}^O \dot{\phi}\vec{i} + J_{yz}^O \dot{\phi}\vec{j} + J_z^O \dot{\phi}\vec{k})$$

$$\vec{L}_O^\square = (J_{xz}^O \ddot{\phi} - J_{yz}^O \dot{\phi}^2)\vec{i} + (J_{yz}^O \ddot{\phi} + J_{xz}^O \dot{\phi}^2)\vec{j},$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^e + \vec{r}_A^O \times \vec{R}_A + \vec{r}_B^O \times \vec{R}_B = (-mgy_C + aY_A - aY_B)\vec{i} + (-mgx_C - aX_A + aX_B)\vec{j}.$$

Остаточно для розв'язування завдання отримуємо наступні рівняння:  $-m\dot{\phi}^2 x_C - m\ddot{\phi}y_C = X_A + X_B$ ,  $m\ddot{\phi}x_C - m\dot{\phi}^2 y_C = Y_A + Y_B$ ,

$$mg = Z_A,$$

$$J_{xz}^O \ddot{\phi} - J_{yz}^O \dot{\phi}^2 = -mgy_C + aY_A - aY_B, \quad J_{yz}^O \ddot{\phi} + J_{xz}^O \dot{\phi}^2 = -mgx_C - aX_A + aX_B,$$

$$J_z^O \ddot{\phi} = M_Z^e.$$

Реакції  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$ , поділяються на статичні й динамічні.

Системи рівнянь, з яких визначають динамічні та статичні реакції, мають вигляд:

$$-m\omega^2 x_C - m\ddot{\phi}y_C = X_A^{\text{дин}} + X_B^{\text{дин}},$$

$$0 = X_A^{\text{ст}} + X_B^{\text{ст}}$$

$$m\ddot{\phi}x_C - m\omega^2 y_C = Y_A^{\text{дин}} + Y_B^{\text{дин}},$$

$$0 = Y_A^{\text{ст}} + Y_B^{\text{ст}},$$

$$J_{xz}^O \ddot{\phi} - J_{yz}^O \omega^2 = -mgy_C + aY_A^{\text{дин}} - aY_B^{\text{дин}}$$

$$mg = Z_A^{\text{ст}}, \quad \text{б)}$$

а)

$$0 = -mgy_C + aY_A^{\text{ст}} - aY_B^{\text{ст}},$$

$$J_{yz}^O \ddot{\phi} + J_{xz}^O \omega^2 = -mgx_C - aX_A^{\text{дин}} + aX_B^{\text{дин}},$$

$$0 = -mgx_C - aX_A^{\text{ст}} + aX_B^{\text{ст}}.$$

$$J_z^O \ddot{\phi} = M_Z^e.$$

Розглянемо розрахункові дані. Центр мас диска ротору зміщено від осі обертання на відстань  $d=25 \cdot 10^{-5}$  м. Колесо має вагу  $P=mg=400$  Н та рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $n=5000$  об/хв. Визначимо реакції підп'ятника  $A$  та підшипника  $B$ , якщо відстань  $AB=h=1$  м,  $BO=h/2=0.5$  м. Вісь  $OZ$  є головною віссю інерції. Приймаємо системи координат – рухому  $Oxyz$ , нерухому зв'язану з колесом ротору (диском), та нерухому  $Axyz$  з центром у точці  $A$  (рис. 3.5). Нехай центр ваги колеса лежить на осі  $Oy$ , тоді  $x_C=0$ .

Для визначення реакцій  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$ , які є складовими по осям рухомої системи координат, скористаємося рівняннями щодо розв'язування завдання:  $0 = X_A + X_B$ ,  $-m\dot{\varphi}^2 y_C = Y_A + Y_B$ ,  $mg = Z_A$ ,

$$0 = -mgd + \frac{h}{2}Y_A - \frac{h}{2}Y_B, \quad 0 = -\frac{h}{2}X_A + \frac{h}{2}X_B.$$

$$\text{Звідси: } Z_A = mg = 400 \text{ Н}, \quad X_A = X_B = 0,$$

$$Y_A = mgd\left(\frac{1}{h} - \frac{\omega^2}{2g}\right) = -1398,65 \text{ Н}, \quad Y_B = -mgd\left(\frac{1}{h} + \frac{\omega^2}{2g}\right) = -1398,85 \text{ Н}.$$

Динамічні реакції підшипників перевищують вагу ротора більш ніж у три рази.

**Приклад 4.** Визначити додаткові динамічні реакції, що виникають у статично незбалансованому роторі, показаному на рисунку 3.6, якщо його центр мас зміщено від центру вісі на  $\vec{r}_C = x_C \vec{i} + y_C \vec{j}$ . Диск статично неврівноважений, центр мас лежить на осі  $Oy$  на відстані  $d=25 \cdot 10^{-5}$  м, тоді  $x_C=0$ , вісь обертання перпендикулярна площині

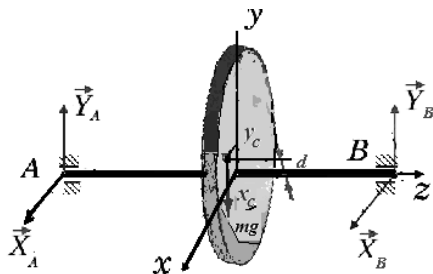


Рисунок 3.6

диску. Маса диска  $m = 10$  кг, радіус  $R = 0.2$  м. Ротор обертається з кутовою швидкістю  $n=12000$  об/мин, відстань між підшипниками  $h=AB=1$  м. Вісь  $Oz$  – головна центральна вісь для ротора,

тому  $J_{Ozy} = J_{Oxz} = 0$ , тоді:  $0 = X_A + X_B$ ,  $Z_A = 0$ ,  $Z_B = 0$ ,

$$-m\dot{\varphi}^2 y_C = -mg + Y_A + Y_B, \quad -m\dot{\varphi}^2 y_C = -mg + Y_A + Y_B,$$

$$0 = -mgd + \frac{h}{2}Y_A - \frac{h}{2}Y_B, \quad 0 = -\frac{h}{2}X_A + \frac{h}{2}X_B,$$

$$Z_A = Z_B = 0, \quad X_A = X_B = 0,$$

$$Y_A = mgd\left(\frac{1}{h} - \frac{\omega^2}{2g} + \frac{1}{2d}\right), \quad Y_B = -mgd\left(\frac{1}{h} + \frac{\omega^2}{2g} - \frac{1}{2d}\right).$$

При досить малом дисбалансі центру мас  $d=25 \cdot 10^{-5}$  м, динамічні реакції значно перевищують статичні реакції.

**Комп'ютерне моделювання динаміки твердого тіла.** Розглянемо вихідний файл, зміст якого надано нижче.

### Інструкції та розрахункові залежності

РАБОТА:=№2. - 1.1 Динаміка фізичного маятника;

ВЫПОЛНИЛ:= ст. Сидоров С.С., гр.ІТ-11;

РИСУНОК:=Ris\_d2\_1.bmp;

J.fi=Joz; P.fi=M+Mtr; M=-m\*g\*h\*sin(fi); Mtr=-b\*fi't; Joz=Jcz+m\*h^2;

Jcz=m\*R^2/2; rC=sqrt(Jcz/m); m=7.8\*PI\*R^2\*H; R=0.5; H=0.25; h=1.5;

b=3; h1=Jcz/(m\*h); fi0=2\*PI/180; dfi0=0; omega=fi't; eps=omega't;

km=sqrt(g/Lzv); Lzv=h+h1; k0=sqrt(m\*g\*h/Joz); Tm=2\*PI/km;

Tkon=n\*Tm; n=10; Zb=-m\*g\*rC^2/(rC^2+h^2)\*sin(fi);

Xb=m\*g\*((3\*h^2+rC^2)/(h^2+rC^2)\*cos(fi)

-2\*h^2/(h^2+rC^2)\*cos(fi0))+m\*h\*dfi0^2; Yb=0;

Za=m\*h\*omega^2; Xa=m\*h\*eps; Ya=0; T=1/2\*Joz\*omega^2; П=-

m\*g\*h\*(cos(fi)-1); E=T+П; T0=1/2\*Joz\*dfi0^2; П0=-m\*g\*h\*(cos(fi0)-1);

E0=П0+T0;

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ:= t(0), fi(fi0), fi't(df0);

КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ:=t(Tkon);

ПЕЧАТАТЬ:=fi,fi't(fi);

СРАВНИТЬ:=реакц1\_B(Zb),реакц2\_B(Yb), реакц3\_B(Xb),

реакц1\_A(Za),реакц2\_A(Ya), реакц3\_A(Xa),собств\_част(km,k0), энергии(T,П,E,E0);

РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;

РАБОТА:=№2.1.2 - Динаміка фізичного маятника;

J.fi=Joz; P.fi=M+Mtr; M=-m\*g\*h\*sin(fi); Mtr=-b\*fi't; b=0.2;

R=0.05;H=1;l=3; h=1/2; m=7.8\*PI\*R^2\*H;Jcz=m\*l^2/12; Xb=-

1/4\*m\*g\*sin(fi); Zb=m\*l/2\*dfi0^2+(5/2\*cos(fi)-3/2\*sin(fi0));

РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;

РАБОТА:=№2.2.1 – Динаміка вертикального ротору;

РИСУНОК:=Ris\_d2\_2.bmp;

J.fi=Joz;P.fi=0; Joz=m\*R^2/2+m\*d^2; fi0=0; dfi0=omega; m=400/g;

omega=5000\*2\*PI/60; eps=0;Tm=2\*PI/omega; n=10^5; AB=h; h=1;R=0.5;

xC=0; zC=0; yC=d; d=25\*10^(-5); zA=-h/2; zB=h/2; T=Joz\*omega^2/2;

T0=Joz\*dfi0^2/2;Π0=0;Π=0;

Za=m\*g; Xa=0;Xb=0; Zb=0; Yb=-m\*g\*d\*(1/h+omega^2/(2\*g));

Ya=m\*g\*d\*(1/h-omega^2/(2\*g));

СРАВНИТЬ:=равномерное\_вращение (omega,fi't);

РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;

РАБОТА:=№2.2.2 – Динаміка горизонтального ротору;

J.fi=Joz; P.fi=0; Joz=m\*R^2/2+m\*d^2; fi0=0; dfi0=omega; m=10;

omega=12000\*2\*PI/60; eps=0;Tm=2\*PI/omega;n=10^5; AB=h;

h=1;R=0.2; xC=0; zC=0; yC=d; d=25\*10^(-5); zA=-h/2;

zB=h/2;T=Joz\*omega^2/2; T0=Joz\*dfi0^2/2;

Π0=0;Π=0; Za=0; Xa=0;Xb=0; Zb=0; Yb=-m\*g\*d\*(1/h+omega^2/(2\*g))-1/(2\*d));

Ya=m\*g\*d\*(1/h-omega^2/(2\*g)+1/(2\*d));

СРАВНИТЬ:=равномерное\_вращение (omega,fi't);

РАСЧЕТ:=ПЕЧАТЬ УРАВНЕНИЙ;

КОНЕЦ;

### 3.5. Динаміка механічної системи. Теоретичний матеріал

**Механічна система** (матеріальна система) – це система (купність) матеріальних точок і тіл, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємообумовлені. **Сили**, які діють на матеріальну систему, поділяються на *внутрішні* –  $\vec{F}_k^i$  та *зовнішні* –  $\vec{F}_k^e$ . *Внутрішні сили* – це сили взаємодії між точками самої матеріальної системи. *Зовнішні сили* – це сили, які діють на точки системи з боку інших точок, які не належать даній матеріальній системі. Внутрішні сили діють на матеріальну систему попарно як дія і протидія  $\vec{F}_k^i = -\vec{F}_{k+1}^i$ , так що геометрична сума внутрішніх сил або головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю, та геометрична сума моментів внутрішніх сил відносно будь-якого центра або головний момент внутрішніх сил і алгебраїчна сума моментів сил відносно осі дорівнюють нулю:

$$\vec{F}^i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0; \quad \vec{M}_O^i = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^i) = 0; \quad M_z^i = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^i) = 0.$$

**Центр мас (центр ваги) матеріальної системи** є геометричною точкою, радіус-вектор якої обчислюється за виразом:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{M},$$

де  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k$  – маса системи,  $\vec{r}_k$  – радіус-вектор

положення кожної  $k$ -тої точки системи відносно фіксованої точки  $O$ .

Центр мас матеріальної системи характеризує розподіл мас по об'єму та у проєкціях на осі координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  визначається так:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M},$$

де  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$  – координати окремих точок матеріальної системи.

**Теорема про рух центра мас механічної системи:** центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорів-

нює масі системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил системи:  $M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$ .

Диференціальні рівняння руху центра мас у проекціях на осі декартової системи координат:

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \quad M \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e.$$

Ці рівняння є також диференціальними рівняннями поступального руху абсолютно твердого тіла. Внутрішні сили не входять в ці рівняння і безпосередньо не впливають на рух центра мас механічної системи. У змінюваній системі внутрішні сили викликають рух точок системи, змінюють їх взаємне розташування, не змінюючи положення центра мас.

У ряді випадків внутрішні сили є причиною появи зовнішніх сил, які викликають рух центра мас. Наприклад, в колісних транспортних засобах (трамвай, тролейбус, автомобіль та ін.) внутрішні сили двигуна впливають на їх рух через сили тертя між ведучими колесами та опорною поверхнею (рейками, шляхом).

**Закон збереження руху центра мас:**

- 1) Якщо  $\vec{F}^e = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0$ , то  $\vec{a}_C = 0$  і  $\vec{v}_C = const$  – центр мас системи рухається рівномірно і прямолінійно або знаходиться у стані спокою;
- 2) Якщо  $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$ , то  $a_{Cx} = \ddot{x}_C = 0$  і  $v_C = \dot{x}_C = const$  – проекція швидкості центра мас на вісь  $x$  є сталою величиною.

**Кількістю руху механічної системи** називається вектор, що дорівнює геометричній сумі кількостей руху всіх матеріальних точок системи:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k.$$

Кількість руху механічної системи дорівнює

добутку маси системи на вектор швидкості її центра мас:  $\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_C$ .

**Теорема про зміну кількості руху системи у диференціальній формі:** похідна за часом від кількості руху механічної системи дорів-

нює головному вектору зовнішніх сил, діючих на систему.  $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e$ ;

або у проекціях на осі координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e.$$

**Теорема про зміну кількості руху системи в інтегральній формі:** зміна кількості руху механічної системи за деякий проміжок часу  $t_1 - t_0 = \tau$  дорівнює імпульсу головного вектора зовнішніх сил, діючих на точки системи, за той же відрізок часу:  $\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \vec{S}^e$ , де  $\vec{Q}_1$  і  $\vec{Q}_0$  - кількість руху системи в кінцевий  $t_1$  і початковий  $t_0$  моменти часу,  $\vec{S}^e = \int_0^\tau \vec{F}^e dt$  - імпульс головного вектора зовнішніх сил системи за даний відрізок часу  $\tau$ .

**Закон збереження кількості руху системи:**

1) Якщо  $\vec{F}^e = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0$ , то кількість руху системи залишається незмінною:  $\vec{Q} = const$ ; 2) Якщо  $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$ , то проекція кількості руху системи на вісь  $Ox$  є сталою:  $Q_x = const$ .

**Головним моментом кількості руху або кінетичним моментом  $\vec{L}_O$  відносно будь-якої нерухомої точки  $O$**  називається геометрична сума моментів кількості руху всіх точок системи відносно даної точки:

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^n \vec{l}_{Ok} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_k \times \vec{q}_k = \sum_{i=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k.$$

**Кінетичним моментом системи відносно даної осі** називається алгебраїчна величина, яка дорівнює сумі моментів кількості руху матеріальних точок системи відносно даної осі:

$$L_x = \sum_{k=1}^n l_{xk} = \sum_{k=1}^n M_x(m_k \vec{v}_k); \quad L_y = \sum_{k=1}^n l_{yk} = \sum_{k=1}^n M_y(m_k \vec{v}_k); \quad L_z = \sum_{k=1}^n l_{zk} = \sum_{k=1}^n M_z(m_k \vec{v}_k),$$

$$\vec{L}_0 = L_x \vec{i} + \vec{L}_y \vec{j} + L_z \vec{k}.$$

**Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи:** похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно будь-якої нерухомої точки дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно тієї ж точки:  $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^e$ , де  $\vec{M}_0^e = \sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_k^e)$  – головний момент усіх зовнішніх сил, діючих на систему, відносно даної точки О. Проекції векторних рівнянь на осі декартової нерухомої системи координат набувають виду:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k^e); \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k^e); \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e).$$

**Закон збереження кінетичного моменту** системи відносно точки:

- 1) Якщо  $\vec{M}_0^e = 0$ , то кінетичний момент системи відносно точки О є сталим як за величиною, так і за напрямком:  $\vec{L}_0 = const$ ; й відносно осі
- 2) Якщо  $\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e) = 0$ , то кінетичний момент системи відносно осі Oz залишається незмінним:  $L_z = const$ .

**Диференціальне рівняння обертання** твердого тіла відносно нерухомої осі Oz:  $J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e)$ , де  $J_z$  - момент інерції твердого тіла відносно осі Z;  $\omega$  - кутова швидкість тіла навколо цієї осі Oz;  $M_z(\vec{F}_k^e)$  - момент k-тої зовнішньої сили відносно осі Oz.

**Моментом інерції механічної системи відносно осі** (осьовим моментом інерції) називається сума добутків мас точок системи на квадрати їх відстаней від осі:  $J_z = \sum_{k=1}^n m_k h_{zk}^2$ .

**Моменти інерції твердого тіла:**

$$\text{— осьові:} \quad J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm; \quad J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm;$$



$$J_z = \int_{(m)} (y^2 + x^2) dm; \text{ — } \textbf{полярні} \text{ (відносно полюса } O\text{): } J_0 = \int_{(m)} r^2 dm, \text{ де}$$

$r$  — відстань частинки від полюса; — **планарні** (відносно площини):

$$J_{xoy} = \int_{(m)} z^2 dm; \quad J_{xoz} = \int_{(m)} y^2 dm; \quad J_{yoz} = \int_{(m)} x^2 dm,$$

$$J_0 = J_{xoy} + J_{xoz} + J_{yoz} = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z); \text{ — } \textbf{відцентрові моменти інерції:}$$

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy dm; \quad J_{xz} = \int_{(m)} xz dm; \quad J_{yz} = \int_{(m)} yz dm.$$

Осі координат  $x, y, z$  називають **головними осями інерції тіла** в точці  $O$ , яка є полюсом системи координат, якщо всі відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю. Якщо ця точка співпадає з центром мас тіла, то осі координат є **головними центральними осями інерції**.

**Радіусом інерції**  $\rho_z$  тіла відносно осі  $z$  називається величина, яка дорівнює відстані від осі до матеріальної точки, маса та осьовий момент інерції якої дорівнює масі та осьовому моменту інерції тіла:

$$J_z = M\rho_z^2; \quad \rho_z = \sqrt{J_z/M}.$$

**Теорема Гюйгенса:** Момент інерції тіла відносно будь-якої осі дорівнює сумі моменту інерції  $J_{cz}$  тіла відносно паралельної осі, що проходить через центр мас  $C$  тіла, і добутку маси тіла на квадрат відстані  $d$  між осями, де  $z_1$  — довільна вісь;  $Cz$  — вісь, що проходить через центр мас  $C$  тіла паралельно осі  $z_1$ :  $J_{z_1} = J_{cz} + Md^2$ .

**Кінетична енергія механічної системи** — це скалярна величина, яка дорівнює сумі кінетичних енергій матеріальних точок системи:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2},$$

де  $m_k$  — маса  $k$ -тої точки системи,  $v_k$  — її швидкість.

**Теорема Кеніга.** Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичної енергії центра мас системи та кінетичної енергії системи в її відносному русі по відношенню до системи координат, яка рухається поступально разом з центром мас:

$$T = \frac{M v_c^2}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_{rk}^2}{2},$$

де  $m_k$  – маса  $k$ -тої точки системи;  $v_{rk}$  – відносна швидкість точки по відношенню до центра мас;  $M$  – маса всієї системи;  $v_c$  – швидкість центра мас системи.

**Кінетична енергія твердого тіла** визначається за формулами: при поступальному русі  $T = \frac{M v_c^2}{2}$ ; при обертальному русі навколо

нерухомої осі  $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$ ; при плоско-паралельному русі

$T = \frac{M v_c^2}{2} + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2$ , де  $M$  – маса тіла,  $v_c$  – швидкість центра мас тіла;  $J_z$ ,  $J_{Cz}$  – момент інерції тіла відносно осі  $z$  (вісь обертання) або осі  $z$ , що проходить через центр мас;  $\omega$  – кутова швидкість тіла.

**Елементарна робота сил**, прикладених до твердого тіла, що вільно рухається, дорівнює сумі роботи головного вектора  $\vec{F}$  системи сил на елементарному переміщенні  $d\vec{r}_0$  полюса  $O$  і роботи головного моменту  $\vec{M}_0$  цієї системи сил відносно полюса на елементарному обертальному переміщенні:  $d'A = \vec{F} d\vec{r}_0 + \vec{M}_0 d\vec{\phi}$ .

**Робота сили**, прикладеної до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі  $Z$ , дорівнює добутку моменту сили відносно даної осі на кут повороту тіла:  $d'A = M_z(\vec{F}) d\phi$ ;  $A = \int_0^\phi M_z(\vec{F}) d\phi$  де  $M_z(\vec{F})$  – момент сили  $\vec{F}$  відносно осі;  $d\phi$ ,  $\phi$  – елементарний і певний кут повороту тіла. У випадку сталого моменту ( $M_z = const$ ) отримаємо  $A = M_z(\vec{F}) \phi$ .

**Потужність**  $W$  є фізичною величиною, що характеризує швидкість, з якою виконується робота:  $W = \vec{F} \cdot \vec{v}$ ;  $W = F_\tau v + M_z \omega$ , де  $\vec{v}$  – швидкість точки прикладення сили,  $F_\tau$  – проекція сили на дотичну,

$M_z(\vec{F})$  – момент сили  $\vec{F}$  відносно осі обертання,  $\omega$  – кутова швидкість тіла. За одиницю потужності прийнято Вт (1Вт=1Н м/с=1Дж/с)

**Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі:** диференціал кінетичної енергії механічної системи дорівнює сумі елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил,

прикладених до точок системи:  $dT = d'A^e + d'A^i = \sum_{k=1}^n d'A_k^e + \sum_{k=1}^n d'A_k^i$ ;

Похідна за часом від кінетичної енергії дорівнює потужності зовнішніх і внутрішніх сил:

$$\frac{dT}{dt} = W^e + W^i; \quad W^e = \frac{d'A^e}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot \vec{v}_k; \quad W^i = \frac{d'A^i}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i \cdot \vec{v}_k;$$

**Теорема в інтегральній формі:** зміна кінетичної енергії системи матеріальних точок на певному переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил на тому самому переміщенні

$$T_l - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i,$$

де  $T_l$  і  $T_0$  – кінетична енергія системи в кінці і на початку шляху;

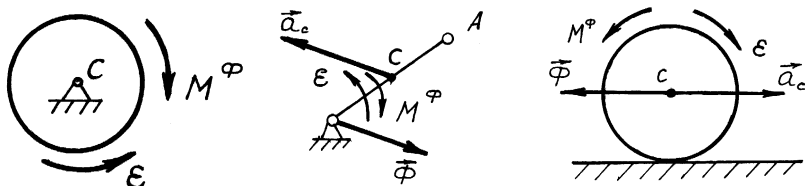
$\sum_{k=1}^n A_k^e$  – сума робіт зовнішніх сил;  $\sum_{k=1}^n A_k^i$  – сума робіт внутрішніх сил.

**Принцип Даламбера для механічної системи:** при русі системи матеріальних точок геометрична сума головних векторів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції дорівнює нулю; геометрична сума головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції відносно деякого нерухомого  $O$  центра також дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k + \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_k) + \sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{R}_k) + \sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{\Phi}_k) = 0.$$

*Сили інерції тіла приводяться:* при поступальному русі – до рівнодійної сил інерції  $\vec{\Phi}_C$ :  $\vec{\Phi}_C = -M \vec{a}_C$ , яка прикладена у центрі мас тіла; при обертальному русі – до головного моменту сил інерції  $\vec{M}^\Phi$  та головного вектора сил інерції  $\vec{\Phi}$ , який прикладений в точці  $O$  на осі обертання:  $\vec{M}_z^\Phi = -J_z \ddot{\epsilon}$ ;  $\vec{\Phi}_0 = -M \vec{a}_C$ , якщо вісь  $z$  – головна центральна вісь

інерції:  $\vec{M}_{Cz}^{\phi} = J_{Cz} \vec{\epsilon}$ ;  $\Phi_O = 0$ ; при плоско-паралельному русі – до головного вектора сил інерції  $\vec{\Phi}_C$ , який прикладений до центра мас, та головного моменту сил інерції  $\vec{M}_{Cz}^{\phi}$ :  $\Phi_C = -M \vec{a}_C$ ;  $\vec{M}_{Cz}^{\phi} = -J_{Cz} \vec{\epsilon}$ , де  $M$  – маса тіла;  $\vec{a}_C$  – прискорення центра мас тіла;  $\vec{\epsilon}$  – кутове прискорення обертального руху;  $J_z, J_{Cz}$  – моменти інерції тіла відносно осі обертання  $Z$  та осі  $Z$ , що проходить через центр мас.



### Питання для самоконтролю

1. Що називають механічною системою?
2. Які моменти інерції тіла Вам відомі?
3. В яких одиницях вимірюється момент інерції тіла і що він характеризує?
4. Що таке радіус інерції тіла?
5. Як формулюється теорема Гюйгенса про моменти інерції?
6. Які міри руху існують?
7. Що таке кількість руху системи, яка його розмірність?
8. Як записується теорема про зміну кількості руху системи в диференціальній формі?
9. Як формулюється закон збереження кількості руху механічної системи?
10. Які задачі розв'язуються за допомогою загальних теорем динаміки?
11. Які міри дії сил мають місце під час руху системи?
12. Як визначаються поняття моменту кількості руху системи?
13. Як формулюється теорема про зміну кінетичного моменту системи?

14. Як визначити кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання?
15. Як формулюється закон збереження кінетичного моменту механічної системи?
16. Які приклади із побуту свідчать про спрацювання закону збереження кінетичного моменту системи?
17. Як формулюється закон збереження кінетичного моменту механічної системи відносно осей координат?
18. Як визначити головний момент кількості руху механічної системи??
19. Як записується вираз кінетичної енергії системи?
20. Як обчислюється кінетична енергія тіл, що рухаються поступально, плоско паралельно, і обертаються?
21. Як записується і формулюється словами теорема про зміну кінетичної енергії у диференціальній і кінцевій формах?
22. Яка розмірність кінетичної енергії?
23. Як формулюється закон збереження механічної енергії?

### **3.6. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3**

#### **Комп'ютерне і аналітичне моделювання динаміки механічних систем**

**Ціллю роботи** є вивчення закономірностей рухів матеріальних механічних систем, які рухаються.

**Об'єктом** досліджень є матеріальні механічні системи.

**Предметом** досліджень є властивості та закономірності рухів механічних систем.

**Методи** досліджень містять аналітичне та комп'ютерне моделювання.

**Аналітичне моделювання динаміки механічних систем за допомогою загальних теорем динаміки.** Одним з найбільш ефективних засобів дослідження руху механічних систем є використання загальних теорем динаміки, за якими дослідження руху зводяться до інтегрування диференціальних рівнянь. Для аналітичного дослідження най-

більш універсальними є теореми про зміну кінетичної енергії системи в інтегральній й диференціальній формах. Перша теорема дозволяє визначити швидкості тіл, а друга – їх прискорення. Інтегрування диференціальних рівнянь руху систем тіл, що встановлюють за загальними теоремами динаміки, більш ефективно здійснити із застосуванням чисельних методів, для чого використовуються програмні засоби для ЕОМ.

Розрахункову схему механічної системи тіл надано на рис. 3.7.

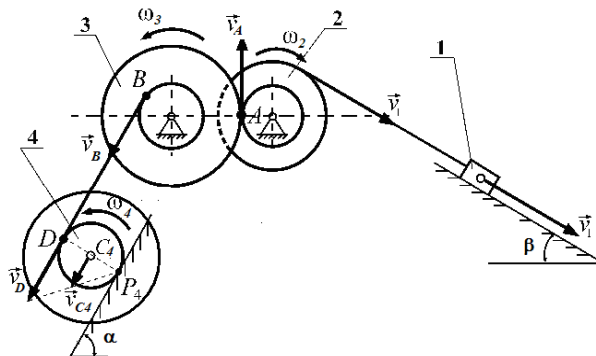


Рисунок 3.7.

Механічна система розпочинає рух зі стану спокою під дією сил ваги, які прикладені у центрах ваги кожного тіла. Тіло 1 рухається поступально зі швидкістю  $\vec{v}_1$  уздовж нерухомої шорсткої поверхні, яка нахилена до горизонту під кутом  $\beta$ . Тіла системи 1 і 2, 3 і 4 є зв'язаними нерозтяжними невагомими тросами, а тіла 2 та 3 під час руху залишаються зчепленими й здійснюють обертальні рухи навколо нерухомої вісі з кутовими швидкостями  $\vec{\omega}_2$ ,  $\vec{\omega}_3$ , відповідно. Котушка 4 здійснює плоско-паралельний рух при коченні без ковзання уздовж нерухомої шорсткої поверхні, нахиленої до горизонту під кутом  $\alpha$ . Котушка просувається уздовж поверхні зі швидкістю її центру мас  $\vec{v}_{C_4}$  та обертається навколо осі з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_4$ . Ковзання тіла 1 та кочення котушки 4 по шорстким поверхням відбувається під дією сил ваги  $\vec{G}_1, \vec{G}_4$  та сили опору ковзанню  $\vec{F}_{\text{тр}}$  й моменту опору коченню  $M_{\text{тр}}$ , відповідно, як показано на рис. 3.8.

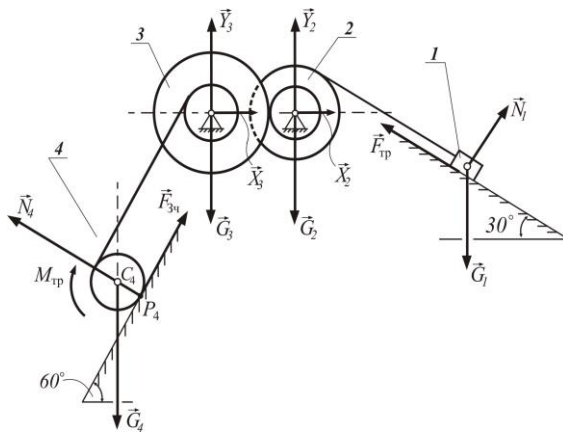


Рисунок 3.8.

Визначити швидкості та прискорення тіл механічної системи в момент часу, коли тіло 1 зі стану спокою переміститься уздовж поверхні на відстань  $S$  (м). Вихідні дані для розв'язання завдання наведено у таблиці 3.1, де  $m_k$  (кг) – маси тіл ( $k = 1, 2, 3, 4$ );  $R_k, r_k$  (м) – зовнішні та внутрішні радіуси тіл обертання ( $k = 2, 3, 4$ );  $\rho_k$  (м) – радіуси інерції складених тіл обертання ( $k = 2, 3$ ),  $f$  – коефіцієнти тертя ковзання,  $f_1$  (м) – коефіцієнт опору коченню шорстких поверхонь.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані

| $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $R_2$ | $r_2$ | $\rho_2$ | $R_3$ | $r_3$ | $\rho_3$ | $R_4$ | $f$   | $f_1$  | $S$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|----------|-------|-------|--------|-----|
| $10m$ | $4m$  | $6m$  | $8m$  | $4r$  | $r$   | $2r$     | $8r$  | $4r$  | $6r$     | $4r$  | $0,1$ | $0,4r$ | $2$ |

**Аналітичні дослідження руху механічної системи.** Для визначення швидкостей тіл системи скористаємось теоремою про зміну кінетичної енергії системи в інтегральній формі. Для системи тіл, що починає рух зі стану спокою під дією зовнішніх сил, запишемо цю теорему:

$$T = A,$$

де  $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$  – кінетична енергія системи тіл,  $A$  – робота зовнішніх сил – сил ваги  $\vec{G}_1, \vec{G}_4$ , сил опору ковзанню  $\vec{F}_{тр}$  й моменту опору коченню  $M_{тр}$ , прикладених до рухомих центрів ваги тіл 1 і 4. Сили

ваги тіл 2 і 3, які прикладені до нерухомих центрів ваги, роботу не здійснюють.

Кінетична енергія тіла 1, що рухається поступально уздовж нерухомої шорсткої поверхні зі швидкістю  $\vec{v}_1$ , дорівнює  $T_1 = m_1 v_1^2 / 2$ . Кінетичні енергії тіл 2 та 3, що здійснюють обертальні рухи навколо своєї нерухомої вісі з кутовими швидкостями  $\omega_2, \omega_3$ , дорівнюють  $T_2 = J_2 \omega_2^2 / 2$ ,  $T_3 = J_3 \omega_3^2 / 2$ , де  $J_2 = m_2 \rho_2^2, J_3 = m_3 \rho_3^2$  – осьові моменти інерції тіл 2 і 3 відповідно. Котушка 4 здійснює плоско-паралельний рух при коченні по шорсткій поверхні, так що її центр мас просувається уздовж поверхні зі швидкістю  $\vec{v}_{C_4}$ , та обертається навколо осі з кутовою швидкістю  $\omega_4$ . Кінетична енергія котушки 4 дорівнює  $T_4 = m_4 v_{C_4}^2 / 2 + J_4 \omega_4^2 / 2$ , де  $J_4 = m_4 R_4^2 / 2$  – осьовий момент її інерції 4.

Кінетичну енергію системи тіл запишемо так:

$$T = m_1 v_1^2 / 2 + J_2 \omega_2^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2 + m_4 v_{C_4}^2 / 2 + J_4 \omega_4^2 / 2.$$

Далі визначимо роботу сил ваги тіл 1 і 4, центри ваги яких зі стану спокою переміщуються уздовж нахилених поверхонь на відстані  $x_1, x_{C_4}$ :

$$A_{G_1} = \vec{G}_1 \cdot \vec{x}_1 = m_1 g \cos(\alpha) x_1; A_{G_4} = \vec{G}_4 \cdot \vec{x}_{C_4} = m_4 g \cos(\beta) x_{C_4}.$$

Значення сили опору ковзанню  $\vec{F}_{\text{тр}}$  та моменту опору коченню  $M_{\text{тр}}$ , прикладених до рухомих центрів ваги тіл 1 і 4, визначимо з урахуванням законів опору:  $F_{\text{тр}} = f N_1$ ,  $M_{\text{тр}} = f_1 N_4$ , де  $f, f_1$  – коефіцієнти тертя ковзання й кочення;  $N_1 = m_1 g \sin(\alpha)$ ,  $N_4 = m_4 g \sin(\beta)$  – нормальні реакції нахилених поверхонь.

Роботу сили опору руху тіла 1 і моменту опору коченню тіла 4 визначимо так:  $A_{F_{\text{тр}}} = -F_{\text{тр}} x_1 = -f m_1 g \sin(\alpha) x_1$ ,

$$A_{M_{\text{тр}}} = -M_{\text{тр}} \varphi_4 = -f_1 m_4 g \sin(\beta) \varphi_4.$$

Остаточно запишемо вираз для роботи зовнішніх сил:



$$A = A_{G_1} + A_{G_4} + A_{F_{тр}} + A_{M_{тр}} = P_1 x_1 + P_4 x_{C_4} + M_{тр} \varphi_4 ,$$

де  $P_1, P_4$  – проекції зовнішніх сил ваги  $\vec{G}_1, \vec{G}_4$  тіл 1 і 4 відповідно, та сили тертя  $\vec{F}_{тр}$  на напрямки їхнього руху,  $M_{тр}$  – проекція моменту опору коченню на вісь тіла 4 відповідно:  $P_1 = m_1 g (\cos(\alpha) - f_1 \sin(\alpha))$ ,  $P_4 = m_4 g \cos(\beta)$ ,  $M_{тр} = -f_1 m_4 \sin(\beta)$ .

Тепер скористаємось кінематичними співвідношеннями між швидкостями тіл системи:

$$\omega_2 = v_1 \frac{1}{R_2}, v_A = \omega_2 r_2 = v_1 \frac{r_2}{R_2}, \omega_3 = v_A \frac{1}{R_3} = v_1 \frac{r_2}{R_2 R_3},$$

$$v_B = \omega_3 r_3 = v_1 \frac{r_2 r_3}{R_2 R_3}, v_D = v_B ,$$

$$\omega_4 = v_D \frac{1}{2R_4} = v_1 \frac{r_2 r_3}{2R_2 R_3 R_4}, v_{C4} = \omega_4 R_4 = v_1 \frac{r_2 r_3}{2R_2 R_3} .$$

Для подальшого розгляду введемо позначення  $d = \frac{r_2 r_3}{R_2 R_3}$  і

знайдемо співвідношення між швидкостями тіл системи:

$$\omega_2 = v_1 \frac{1}{R_2}, \omega_3 = v_1 \frac{d}{r_3}, \omega_4 = v_1 \frac{d}{2R_4}, v_{C4} = v_1 \frac{d}{2} .$$

Після інтегрування цих рівностей з урахуванням того, що у початковому стану система знаходилась у спокої, отримуємо співвідношення між кутами обертання та переміщеннями тіл системи:

$$\varphi_2 = x_1 \frac{1}{R_2}, \varphi_3 = x_1 \frac{d}{r_3}, \varphi_4 = x_1 \frac{d}{2R_4}, x_{C4} = x_1 \frac{d}{2} .$$

Перепишемо вираз для кінетичної енергії системи тіл з урахуванням отриманих співвідношень:

$$T = \left[ \frac{m_1}{2} + \frac{J_2}{2} \cdot \left( \frac{1}{R_2} \right)^2 + \frac{J_3}{2} \cdot \left( \frac{d}{r_3} \right)^2 + \frac{m_4}{2} \cdot \left( \frac{d}{2} \right)^2 + \frac{J_4}{2} \cdot \left( \frac{d}{2R_4} \right)^2 \right] v_1^2 ,$$

а також для роботи зовнішніх сил, діючих на тіла системи:

$$A = \left[ P_1 + \frac{P_4 \cdot d}{2} + \frac{M_{\text{тр}} \cdot d}{2R_4} \right] x_1.$$

Далі остаточно знайдемо швидкості та прискорення тіл механічної системи в момент часу, коли тіло 1 зі стану спокою переміститься уздовж поверхні на відстань  $x_1 = S$ :  $v_1 = \sqrt{\frac{A^*}{T^*}},$

$$\text{де } T^* = \left[ \frac{m_1}{2} + \frac{J_2}{2} \cdot \left( \frac{1}{R_2} \right)^2 + \frac{J_3}{2} \cdot \left( \frac{d}{r_3} \right)^2 + \frac{m_4}{2} \cdot \left( \frac{d}{2} \right)^2 + \frac{J_4}{2} \cdot \left( \frac{d}{2R_4} \right)^2 \right],$$

$$A^* = \left[ P_1 + \frac{P_4 \cdot d}{2} + \frac{M_{\text{од}} \cdot d}{2R_4} \right] S.$$

Підставляючи вихідні дані (див. табл. 3.1), одержимо такі значення:  $T^* = 5,629$  кг,  $A^* = 96,258$  Дж,  $v_1 = 4,135$  м/с. За цими даними визначимо швидкості, координати центрів мас та кути обертання усіх тіл системи:

$$\omega_2 = v_1 \frac{1}{R_2}, \quad \omega_3 = v_1 \frac{d}{r_3}, \quad \omega_4 = v_1 \frac{d}{2R_4}, \quad v_{C_4} = v_1 \frac{d}{2};$$

$$\varphi_2 = S \frac{1}{R_2}, \quad \varphi_3 = S \frac{d}{r_3}, \quad \varphi_4 = S \frac{d}{2R_4}, \quad x_{C_4} = S \frac{d}{2},$$

а далі одержимо такі значення:

$$\omega_2 = 10,35 \text{ с}^{-1}; \omega_3 = 1,29 \text{ с}^{-1}; \omega_4 = 0,646 \text{ с}^{-1}; v_{C_4} = 0,258 \text{ м/с};$$

$$\varphi_2 = 5 \text{ рад}; \varphi_3 = 0,625 \text{ рад}; \varphi_4 = 0,31 \text{ рад}; x_{C_4} = 0,125 \text{ м}.$$

Для знаходження прискорень тіл системи скористуємось теоремою про зміну кінетичної енергії в диференційній формі  $\frac{dT}{dt} = W$ , де  $T$  – кінетична енергія системи тіл,  $W$  – потужність зовнішніх сил; а також рівністю для визначення похідної від кінетичної енергії

$$\frac{dT}{dt} = \partial T^* \cdot v_1 \cdot a_1,$$

$$\text{де } \partial T^* = \left[ m_1 + J_2 \cdot \left( \frac{1}{R_2} \right)^2 + J_3 \cdot \left( \frac{d}{r_3} \right)^2 + m_4 \cdot \left( \frac{d}{2} \right)^2 + J_4 \cdot \left( \frac{d}{2R_4} \right)^2 \right],$$

$a_1 = \dot{v}_1$  – прискорення тіла 1, яке здійснює поступальний рух уздовж нерухомої шорсткої поверхні зі швидкістю  $\vec{v}_1$ .

Потужність сил дорівнює роботі зовнішніх сил у одиницю часу, тобто вона може рахуватись як добуток сили на відповідну швидкість

$$W = W_{G_1} + W_{G_4} + W_{F_{\text{тр}}} + W_{M_{\text{тр}}} = P_1 \cdot v_1 + P_4 \cdot v_{C_4} + M_{\text{тр}} \cdot \omega_4.$$

Перепишемо ці співвідношення наступним чином:

$$W = W^* v_1, \quad W^* = P_1 + P_4 \frac{d}{2} + M_{\text{тр}} \frac{d}{2R_4}.$$

Далі остаточно знайдемо прискорення тіл механічної системи в момент часу, коли тіло 1 з положення спокою переміститься уздовж пове-

$$\text{рхні на відстань } x_1 = S: \quad a_1 = \frac{W^*}{\partial T^*},$$

а також знайдемо прискорення тіл системи:

$$\varepsilon_2 = a_1 \frac{1}{R_2}, \quad \varepsilon_3 = a_1 \frac{d}{r_3}, \quad \varepsilon_4 = a_1 \frac{d}{2R_4}, \quad a_{C_4} = a_1 \frac{d}{2}.$$

Підставляючи вихідні дані одержимо, що  $\partial T^* = 11,258 \text{ кг}$ ,  $W^* = 48,13 \text{ Н}$ ,  $a_1 = 4,37 \text{ м/с}^2$ . За цими даними визначимо прискорення тіл системи:

$$\varepsilon_2 = 10,7 \text{ с}^{-2}; \quad \varepsilon_3 = 1,33 \text{ с}^{-2}; \quad \varepsilon_4 = 0,668 \text{ с}^{-2}; \quad a_{C_4} = 0,267 \text{ м/с}^2.$$

Таким чином, застосувавши теореми про зміну кінетичної енергії в інтегральній та диференціальній формах, для розглянутої у завданні системи тіл визначено швидкості й прискорення тіл системи в момент часу, коли тіло 1 з положення спокою перемістилось уздовж поверхні на відстань  $S = 2 \text{ м}$ .

Далі виконаємо дослідження руху системи у часі, застосувавши диференціальні рівняння тіл системи, які отримані з загальних теорем динаміки, які зводяться до інтегрування систем диференціальних рівнянь з початковими умовами. Для виконання дослідження використаємо ПК КіДиМ.

**Комп'ютерне моделювання.** Для механічної системи тіл, яку розглянуто в попередньому підрозділі і представлено розрахунковою схемою рис. 3.7 та рис. 3.8 з вихідними даними (див. табл. 3.1), визначити швидкості та прискорення її тіл у довільний момент часу. Для опису моделі системи скористаємось правилами ПК КіДиМ [3-4]. Представимо систему такою, що складається з інерційних та силових елементів, структура яких була представлена у 1-му розділі. Поступальний рух тіла 1 описують однією координатою  $x_1$ , тому у моделі, що аналізується, цьому тілу відповідатиме інерційний елемент  $J.x_1$ . Тіла 2 та 3 здійснюють обертальний рух, який описують координатами  $\varphi_2$  та  $\varphi_3$ , їм відповідатимуть інерційні елементи  $J.\varphi_2$  та  $J.\varphi_3$ . Котушка 4 здійснює плоско-паралельний рух, який описують координатами  $x_{C_4}$  та  $\varphi_4$ , тому у моделі ПК КіДиМ катушці відповідатимуть два інерційні елементи  $J.x_{\tilde{N}_4}$  та  $J.\varphi_4$ .

Силкові елементи фактично являють собою проекції зовнішніх сил механічної системи на відповідні напрямки (напрямки відліку локальних координат елементів):

$$P.x_1 = m_1 g (\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)); P.x_{C_4} = m_4 g \cos(\beta); P.\varphi_4 = -M_{\text{тр}}, \quad M_{\text{тр}} = f_1 m_4 g \sin(\beta).$$

Рух вказаних інерційних елементів пов'язані поміж собою:

$$\varphi_2 = \frac{x_1}{R_2}, \quad \varphi_3 = \frac{\varphi_2 \cdot r_2}{R_3}, \quad \varphi_4 = \frac{\varphi_3 \cdot r_3}{2R_4}, \quad x_{C_4} = \varphi_4 \cdot R_4.$$

Рух системи розпочинається із положення спокою, тому початкові умови можуть бути сформульовані наступним чином:  
 $x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0.$

### **Інструкції та розрахункові залежності**

РАБОТА:=ЛРЗ.1 Динаміка механічної системи.

Теорема про зміну кінетичної енергії;

ВЫПОЛНИЛ := ст. Петренко П.П, гр.ІТ-12а;

РИСУНОК:=ris\_d4.bmp;

Sc4=x1\*r3/(R3\*2); fi2=x1/R2; fi3=x1/R3; fi4=Sc4/R4;

J.x1 = m1; J.fi2 = J2; J.fi3 = J3; J.Sc4 = m4; J.fi4 = J4;

P.x1=Px1; Px1=m1\*g\*sin(alpha)-Fтр; Fтр=f1\*m1\*g\*cos(alpha);

$P.Sc4=PSc4$ ;  $PSc4=m4*g*\sin(\text{betta})$ ;  
 $m1=10$ ;  $m2=2$ ;  $m3=3$ ;  $m4=5$ ;  $J2=m2*R2^2/2$ ;  $J3=m3*i3^2$ ;  $J4=m4*R4^2/2$ ;  
 $R2=0.15$ ;  $R3=0.3$ ;  $r3=0.2$ ;  $R4=0.3$ ;  $i3=0.25$ ;  $f1=0.2$ ;  $S=2.02$ ;  
 $\text{betta}=\pi/3$ ;  $\alpha=\pi/4$ ;  
 $vx1=x1't$ ;  $ax1=x1't't$ ;  $vc4=vx1*r3/(R3^2)$ ;  $ac4=vc4't$ ;  
 $om2=vx1/R2$ ;  $\text{eps}2=ax1/R2$ ;  $om3=vx1/R3$ ;  $\text{eps}3=ax1/R3$ ;  
 $om4=vx1*r3/(2*R3*R4)$ ;  $\text{eps}4=ax1*r3/(2*R3*R4)$ ;  
 $T=0.5*(m1*x1't^2+J2*fi2't^2+J3*fi3't^2+$   
 $m4*Sc4't^2+J4*fi4't^2)$ ;  
 $W=(m1+J2/R2^2+J3/R3^2+(m4+J4/R4^2)*(r3/(R3^2))^2)*x1't*x1't't$ ;  
 $AP=Px1*x1+PSc4*Sc4$ ;  $NP=Px1*x1't+PSc4*Sc4't$ ;  
 $tk=0.9$ ;  $n2=fi2/(2*\pi)$ ;  $n3=fi3/(2*\pi)$ ;  
 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ:=  $t(0)$ ,  $x1(0)$ ,  $x1't(0)$ ;  
 КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ:=  $t(tk)$ ,  $x1=S$ ;  
 ПОКАЗАТЬ:=  $fi2't(n2)$ ,  $fi3't(n3)$ ;  
 СРАВНИТЬ:= смещение тела\_и\_шара( $x1$ ,  $Sc4$ ),  
 скорость\_ускорение тела\_шара( $vx1$ ,  $ax1$ ,  $vc4$ ,  $ac4$ ),  
 кинетическая\_энергия\_работа\_сил( $T$ ,  $AP$ ),  
 изменение кинетической энергии\_и\_мощность( $W$ ,  $NP$ ) ;  
 РАСЧЕТ:= УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ;  
 РАБОТА:= ЛР 3.2.1 Скорость и ускорение в конце пути- $X1k=S$ ;  
 $x1k=S$ ;  $Sc4k=x1k*r3/(R3^2)$ ;  $tk=1.26$ ;  $S=4$ ;  
 $T'=0.5*(m1+J2/R2^2+J3/R3^2+(m4+J4/R4^2)*(r3/(2*R3))^2)$ ;  
 $APk=(Px1+PSc4*r3/(2*R3))*x1k$ ;  
 $V1k=\sqrt{APk/T'}$ ;  $Tk=T'*V1k^2$ ;  
 $W'=(m1+J2/R2^2+J3/R3^2+(m4+J4/R4^2)*(r3/(R3^2))^2)*V1k$ ;  
 $NPk=(Px1+PSc4*r3/(2*R3))*V1k$ ;  $A1k=NPk/W'$ ;  $Wk=W'*A1k$ ;  
 СРАВНИТЬ:= смещение тела\_и\_шара( $x1$ ,  $x1k$ ,  $Sc4$ ,  $Sc4k$ ),  
 скорость\_и\_ускорение тела\_1( $vx1$ ,  $V1k$ ,  $ax1$ ,  $A1k$ ),  
 кинетическая\_энергия\_работа\_сил( $T$ ,  $AP$ ,  $Tk$ ,  $APk$ ),  
 изменение кинет\_энергии\_мощность( $W$ ,  $NP$ ,  $Wk$ ,  $NPk$ );  
 РАСЧЕТ:= УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ;  
 РАБОТА:= ЛР 3.2.2 Скорость и укорение в конце пути- $X1k=S$ ;  
 $tk=0.9$ ;  $x1k=S$ ;  $S=2.02$ ;  $Sc4k=x1k*r3/(R3^2)$ ;  
 РАСЧЕТ:= УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ;  
 КОНЕЦ;

### 3.7. Елементи аналітичної механіки. Теоретичний матеріал

**Вільні й невільні механічні системи.** Механічна система називається вільною, якщо рух її точок не обмежений ніякими сторонніми тілами (в'язями). Якщо рух механічної системи обмежений в'язями, то вона називається невільною.

**Класифікація в'язей.** Обмеження, які в'язі накладають на механічну систему, аналітично виражаються у вигляді співвідношень (рівнянь або нерівностей) між часом, координатами і швидкостями матеріальних точок, які утворюють систему. *Геометричні* (скінченні) в'язі – це такі в'язі, до рівняння яких не входять швидкості точок системи:  $f(t, x_i, y_i, z_i) = 0, (i = 1, \dots, n)$ . *Кінематичні* (диференціальні) в'язі – це такі в'язі, до рівняння яких входять швидкості точок системи:  $f(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0, (i = 1, \dots, n)$ . Якщо рівняння кінематичної в'язі після інтегрування можна перетворити у рівняння геометричної в'язі, то така кінематична в'язь називається *голономною* (інтегрованою). У протилежному випадку кінематична в'язь називається *неголономною* (неінтегрованою). *Стационарні в'язі* – це в'язі, до рівнянь яких час не входить у явному вигляді. *Нестационарні в'язі* – це в'язі, до рівнянь яких час входить у явному вигляді. *Двобічні* (утримуючі) в'язі – це в'язі, що обмежують рух точок механічної системи у двох взаємно протилежних напрямках зовнішніх нормалей до поверхні в'язі. *Однобічні* (неутримуючі) в'язі – це в'язі, що обмежують рух точок механічної системи в якомусь одному напрямі зовнішньої нормалі до поверхні в'язі і не обмежують його в протилежному напрямі. Утримуючі в'язі аналітично виражаються рівнянням:  $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0$ , а неутримуючі – нерівностями:  $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \leq 0$ .

*Можливими* (або *віртуальними*) *переміщеннями* системи називаються умовні нескінченно малі її незалежні переміщення, що дозволяються в'язями системи в даний момент часу (в даному положенні системи).

*Ідеальні в'язі* – це такі в'язі, сума робіт реакцій яких на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Приклади ідеальних в'язей: абсолютно гладенька поверхня (напрямні); ідеальні шарніри (підшипники), стрижні та ін.

**Принцип можливих переміщень:** для рівноваги системи зі стаціонарними двобічними ідеальними в'язями необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх активних сил, діючих на систему, на будь-якому можливому переміщенні системи з даного її положення у

положення рівноваги дорівнювала нулю: 
$$\sum_{k=1}^n \delta A_i^a = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0,$$

або 
$$\sum_{k=1}^n F_k \delta r_k \cos(\vec{F}_k, \delta \vec{r}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = 0.$$

**Узагальнені координати, швидкості та узагальнені сили.**

**Узагальненими координатами**  $q_1, q_2, \dots, q_S$  називають такі незалежні один від одного параметри, завданням яких можна однозначно визначити положення усіх точок системи. Такими параметрами можуть бути декартові координати, кути, віддалі та ін. Число  $S$  цих незалежних параметрів називають **числом ступенів вільності** механічної системи.

Похідні за часом від узагальнених координат, тобто величини  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S$ , називаються **узагальненими швидкостями** системи.

Обчислимо роботу прикладених до точок системи активних сил  $\vec{F}_k$  на можливому переміщенні системи:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^S \left( \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^S Q_i \cdot \delta q_i,$$

де 
$$Q_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \quad i=1, 2, \dots, S.$$

Величини  $Q_1, Q_2, \dots, Q_S$ , що є множниками при можливих (віртуальних) переміщеннях узагальнених координат у формулі роботи активних сил на можливому переміщенні системи, називаються **узагальненими силами**. Щоб обчислити узагальнену силу  $Q_i$  ( $i=1, 2, \dots, S$ ), досить надати можливе переміщення координаті  $q_i$  і визначити робо-

ту  $\delta A_i$  активних сил на переміщеннях точок системи, які зумовлені тільки зміною координати  $q_i$ . Маємо  $Q_i = \delta A_i / \delta q_i$ , ( $i=1,2, \dots S$ ).

Якщо активні сили є потенціальними, то узагальнені сили дорівнюватимуть частинним похідним від потенціальної енергії  $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$  по узагальнених координатах:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

**Загальне рівняння динаміки системи:** при русі системи, яка підпорядкована голономним двостороннім ідеальним в'язям, сума робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи повинна дорівнювати нулю:  $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{q}_k + \sum_{k=1}^n \vec{Q}_k \cdot \delta \vec{q}_k = 0$ , або  $Q_i + Q_i^{in} = 0$  ( $i=1,2, \dots S$ ), де  $\vec{Q}_k$  – сила інерції точки;  $Q_i^{in}$  – узагальнена сила інерції;  $\delta \vec{q}_k$  – можливе переміщення точки.

**Рівняння Лагранжу 2-го роду** мають наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1,2, \dots S),$$

де  $T$  – кінетична енергія системи, представлена як функція узагальнених координат, узагальнених швидкостей і часу;  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial q_i}$  – частинні похідні кінетичної енергії по узагальнених швидкостях і координатах.

### Питання для самоконтролю

1. Яка механічна система має назву невідільної?
2. Які в'язі називають геометричними та кінематичними?
3. Які в'язі називають стаціонарними та нестаціонарними?
4. Які в'язі називають голономними та неголономними?
5. Які переміщення називають можливими (віртуальними)?
6. Які в'язі називають ідеальними?
7. Які координати називаються узагальненими?
8. Як визначаються узагальнені сили?
9. Що називають узагальненими швидкостями?
10. Який вигляд мають рівняння Лагранжа другого роду?
11. Якою є кількість рівнянь Лагранжа роду для кожної матеріальної системи?



### 3.8. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

#### Моделювання динаміки механічних систем методами аналітичної механіки

**Ціллю роботи** є вивчення закономірностей рухів матеріальних механічних систем, які рухаються.

**Об'єктом** досліджень є матеріальні механічні системи.

**Предметом** досліджень є властивості та закономірності рухів механічних систем.

**Методи** досліджень містять аналітичне та комп'ютерне моделювання.

**Аналітичне моделювання динаміки механічної системи на базі рівнянь Лагранжу 2-го роду.** Механічна система складається з обмотаних тросами блоку 1 радіуса  $R_1$  і східчастого шківів 2 радіуса  $R_2$ , а так само з вантажів 3, 4 і 5, прикріплених до цих тросів. Система рухається у вертикальній площині під дією сил ваги і пари сил з моментом  $M$ , прикладених до блоку 1 (рис.3.9).

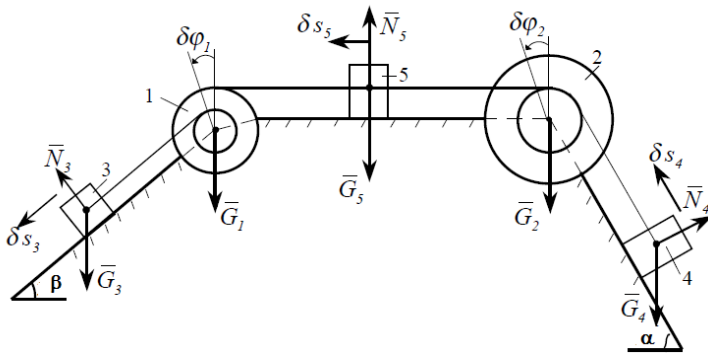


Рисунок 3.9

На підставі розв'язування диференціальних рівнянь Лагранжу 2-го роду визначимо закони руху тіл вихідної механічної системи та встановимо кінематичні характеристики руху тіл системи: швидкості, пришвидшення й переміщення за час, коли при підйомі тіло 4 пройде шлях  $S_{4к}$ , а також зміни у часі мір механічного руху і дії сил: кінетичної та повної енергії, роботи й потужності сил. При обчисленнях приймемо, що на початку механічна система знаходилась

у спокої, а рух тіл системи здійснюється під дією їхньої ваги, а також змінного у часі моменту –  $M = kt^n$ , кНм, який передається від електродвигуна на шків 1. Інерційні дані тіл системи дорівнюють:  $G_1=30$  Н,  $G_2=30$  Н,  $G_3=40$  Н,  $G_4=20$  Н,  $G_5=10$  Н; геометричні параметри шківів та колеса:  $R_1=0.2$  м,  $R_2=0.3$  м,  $r_1=0.1$  м,  $r_2=0.15$  м,  $\rho_1 = 0.1$  м,  $\rho_2 = 0.2$  м; кути нахилу поверхонь:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .

#### Аналітичне моделювання динаміки механічної системи.

Визначимо швидкості тіл, які утворюють систему:

$$v_3 = \dot{s}_3, \quad \omega_1 = \frac{v_3}{r_1}, \quad \omega_2 = \frac{v_5}{r_2} = \frac{R_1}{r_1 r_2} v_3, \quad v_5 = \frac{R_1}{r_1} v_3, \quad v_4 = \omega_2 R_2 = \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} v_3.$$

Визначимо кінетичну енергію системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5,$$

$$\text{де } T_1 = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} = \frac{G_1}{2g} \rho_1^2 \frac{v_3^2}{r_1^2}; \quad T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{G_2}{2g} \rho_2^2 \frac{R_1^2 v_3^2}{r_1^2 r_2^2};$$

$$T_3 = \frac{G_3}{2g} v_3^2; \quad T_4 = \frac{G_4}{2g} \frac{R_1^2 R_2^2 v_3^2}{r_1^2 r_2^2}; \quad T_5 = \frac{G_5}{2g} \frac{R_1^2 v_3^2}{r_1^2}.$$

$$\text{Звідси маємо } T = \left( G_1 \frac{\rho_1^2}{r_1^2} + G_2 \rho_2^2 \frac{R_1^2}{r_1^2 r_2^2} + G_3 + G_4 \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} + G_5 \frac{R_1^2}{r_1^2} \right) \frac{\dot{s}_3^2}{2g}.$$

Якщо прийняти узагальнену координату  $q = s_3$ , тоді маємо:

$$\varphi_1 = \frac{q}{r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{R_1}{r_1 r_2} q, \quad s_5 = \frac{R_1}{r_1} q, \quad s_4 = \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} q.$$

Розглянута механічна система має одну ступень вільності і тоді рівняння Лагранжу 2-го роду для неї має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad q(0) = \dot{q}(0) = 0.$$

Спочатку обчислимо кінетичну енергію та узагальнену силу:

$$T = \left( G_1 \frac{\rho_1^2}{r_1^2} + G_2 \rho_2^2 \frac{R_1^2}{r_1^2 r_2^2} + G_3 + G_4 \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} + G_5 \frac{R_1^2}{r_1^2} \right) \frac{\dot{q}^2}{2g};$$

$$Q = \delta A / \delta q, \quad \delta A = (G_3 \sin \beta \delta s_3 + M \delta \varphi_1 - G_4 \delta s_4) = \left( G_3 \sin \beta + M \frac{1}{r_1} - G_4 \sin \alpha \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \right) \delta q,$$

Звідки отримуємо:  $Q = G_3 \sin \beta + M \frac{I}{r_1} - G_4 \sin \alpha \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2}$ .

Рівняння Лагранжу дозволить записати наступне диференціальне рівняння руху механічної системи:

$$M \ddot{q} = F,$$

$$\text{де } M = \frac{I}{g} \left( G_1 \frac{\rho_1^2}{r_1^2} + G_2 \rho_2^2 \frac{R_1^2}{r_1^2 r_2^2} + G_3 + G_4 \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} + G_5 \frac{R_1^2}{r_1^2} \right)$$

та  $F = G_3 \sin \beta + G_4 \sin \alpha \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} - M \frac{I}{r_1}$  – приведені маса та сила, що діє на механічну систему.

Після інтегрування рівняння Лагранжу та визначення сталих інтегрування за допомогою початкових умов отримуємо закон руху системи:

$$\dot{q} = (F / M_q) t + 1 / (M_q R_1) \int M(t) dt,$$

$$q = (F / (2M_q)) t^2 + 1 / (M_q R_1) \int [ \int M(t) dt ] dt.$$

Для  $M(t) = kt^n$ :

$$\int M(t) dt = k / (n+1) t^{n+1}; \quad \int [ \int M(t) dt ] dt = k / (n+1) t^{n+2} / (n+2).$$

При  $k = 3, n = 2$ , отримуємо:  $q = (F / (2M_q)) t^2 + 1 / (4M_q R_1) t^4$ ,

$$\dot{q} = (F / (M_q)) t + 1 / (M_q R_1) t^3, \quad \ddot{q} = F / (M_q) + 3 / (M_q R_1) t^2;$$

закони руху тіл:  $\varphi_1 = \frac{q}{r_1}, \varphi_2 = \frac{R_1}{r_1 r_2} q, s_5 = \frac{R_1}{r_1} q, s_4 = \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} q$ ;

міри руху і дії сил: кінетична енергія –  $T = 1/2 M \dot{q}^2$ , робота та потужність сил –  $A = Qq, W = Q\dot{q}$ .

Характеристики руху тіл: швидкості –  $v_3 = \dot{s}_3, \omega_1 = \frac{v_3}{r_1}$ ,

$$\omega_2 = \frac{v_5}{r_2} = \frac{R_1}{r_1 r_2} v_3, \quad v_5 = \frac{R_1}{r_1} v_3, v_4 = \omega_2 R_2 = \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} v_3, \text{ при швидкостях}$$

$$a_{c3} = \ddot{q}, \quad a_{c4} = \varepsilon_4 R_2, \quad \varepsilon_1 = \ddot{q} / r_1, \varepsilon_2 = \varepsilon_1 R_1 / R_2, \varepsilon_4 = \varepsilon_2 r_2 R_4 / ((R_4 + r_4) R_4).$$

### Комп'ютерне моделювання динаміки механічної системи.

Досліджуються закони руху тіл механізму електромеханічного приводу, що під дією змінного у часі моменту на валу електродвигуна приводить до руху різні тіла електромеханічного приводу; закономірності зміни у часі мір механічного руху і дії сил: кількості руху, кінетичного моменту, кінетичної та повної енергії, роботи й потужності сил, а також кінематичних характеристик руху тіл механізму: швидкостей, пришвидшень й переміщення з початкового їхнього положення, на базі розв'язування диференціальних рівнянь Лагранжу 2-го роду, які в інваріантній формі є наслідком теоретичних положень і фундаментальних принципів аналітичної механіки.

Для вирішення завдань спочатку визначимо залежності між узагальненими координатами із врахуванням в'язей для кожного з тіл

$$\varphi_1 = \frac{q}{r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{R_1}{r_1 r_2} q, \quad s_5 = \frac{R_1}{r_1} q, \quad s_4 = \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} q, \quad q = s_3.$$

Характеристики руху (інерційні параметри та проекції діючих на ці тіла зовнішні сили) тіл механічної системи:

$$J.s_3 = m_3, \quad m_3 = G_3 / g; \quad P.s_3 = m_3 g \sin \beta;$$

$$J.s_5 = m_5, \quad m_5 = G_5 / g; \quad P.s_5 = 0,$$

відповідно до поступального руху тіла 3 під дією ваги та тіла 5;

$$J.s_4 = m_4, \quad m_4 = G_4 / g; \quad P.s_4 = -m_4 g \sin \alpha,$$

відповідно до поступального руху тіла 4 під дією ваги;

$$J.\varphi_1 = J_1, \quad J_1 = G_1 \rho_1^2 / g; \quad P.\varphi_1 = M; \quad J.\varphi_2 = J_2, \quad J_2 = G_5 \rho_2^2 / g; \quad P.\varphi_2 = 0,$$

відповідно до обертального руху блоку 1 при дії пари сил з моментом  $M$ , прикладених до блоку 1 і східчастого шківів 2 з моментами інерції :

$$I_1 = m_1 \rho_{1z}^2, \quad I_2 = m_2 \rho_{2z}^2.$$

Розглянемо вихідний файл, зміст якого надано нижче.

## Інструкції та розрахункові залежності

РАБОТА:=№4 - Динаміка механічної системи;  
 ВЫПОЛНИЛ:= ст. Сидоров С.С., гр.ИТ-11а;  
 #Диференціальні рівняння руху тіл #  
 $J.S3=m3$ ;  $J.S4=m4$ ;  $J.S5=m5$ ;  $J.F1=I1$ ;  $J.F2=I2$ ;  
 $P.S3=P3$ ;  $P3=m3*g*\sin(\text{betta})-f*m3*g*\cos(\text{betta})$ ;  
 $P.S4=P4$ ;  $P4=-m4*g*\sin(\text{alfa})$ ;  
 $P.S5=P5$ ;  $P5=-f*m5*g$ ;  
 $P.F1=M$ ;  $P.F2=0$ ;  $M=k*t^n$ ;  $k=3$ ;  $n=2$ ;  
 $F1=S3/r1$ ;  $F2=S3*R1/(r1*r2)$ ;  $S4=S3*R2*R1/(r1*r2)$ ;  $S5=S3*R1/r1$ ;  
  
 $Xc3=S3$ ;  $Xc4=S4$ ;  $Vc3=Xc3't$ ;  $Vc4=Xc4't$ ;  $Ac3=Xc3't't$ ;  $Ac4=Xc4't't$ ;  $Xc5=S5$ ;  
 $Vc5=Xc5't$ ;  $Ac5=Xc5't't$ ;  
 $om1=F1't$ ;  $om2=F2't$ ;  $eps1=F1't't$ ;  $eps2=F2't't$ ;  
 $T=I1*om1^2/2+I2*om2^2/2+m3*Vc3^2/2+m4*Vc4^2/2+m5*Vc5^2/2$ ;  
 $A=M*F1+P3*S3+P4*S4+P5*S5$ ;  $N=M*om1+P3*Vc3+P4*Vc4+P5*Vc5$ ;  
 $T'=I1*eps1*om1+I2*eps2*om2+m3*Ac3*Vc3+m4*Ac4*Vc4+m5*Ac5*Vc5$ ;  
 $E=T-A$ ;  $E'=T'-N$ ;  
 # Рівняння Лагранжа #  
 $J.q = Mm$ ;  $P.q = Q$ ;  $Mm=(G1*R01z^2/r1^2+G2*R02z^2*R1^2/(r1^2*r2^2)+G3+G4*R1^2*R2^2/(r1^2*r2^2)+G5*R1^2/r1^2)/g$ ;  
 $Q=M/r1+G3*(\sin(\text{betta})-f*\cos(\text{betta}))-G4*\sin(\text{alfa})*R1*R2/(r1*r2)$ ;  
 $Sc3=q$ ;  $fi1 = q/r1$ ;  $fi2 = q*R1/(r1*r2)$ ;  $Sc4 = q*R2*R1/(r1*r2)$ ;  $Sc5=q*R1/r1$ ;  
 $vc3=Sc3't$ ;  $vc4=Sc4't$ ;  $ac3=Sc3't't$ ;  $ac4=Sc4't't$ ;  $vc5=Sc5't$ ;  $ac5=Sc5't't$ ;  
 $omega1=fi1't$ ;  $omega2=fi2't$ ;  $epsil1=fi1't't$ ;  $epsil2=fi2't't$ ;  
 $Tq=Mm*q*t^2/2$ ;  $Aq=Q*q$ ;  $Nq=Q*q't$ ;  $Tq'=Mm*ac3*vc3$ ;  $Eq=Tq-Aq$ ;  
  
 $m1=G1/g$ ;  $m2=G2/g$ ;  $m3=G3/g$ ;  $m4=G4/g$ ;  $m5=G5/g$ ;  $\text{alfa}=\pi/4$ ;  $\text{betta}=\pi/3$ ;  $f=0.2$ ;  
 $I1=m1*R01z^2/2$ ;  $I2=m2*R02z^2$ ;  $G1=30$ ;  $G2=30$ ;  $G3=40$ ;  $G4=20$ ;  $G5=10$ ;  
 $R1=0.2$ ;  $R2=0.3$ ;  $r1=0.1$ ;  $r2=0.15$ ;  $R01z=0.1$ ;  $R02z=0.2$ ;  $S3k=0.25$ ;  
 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ :=  $t(0)$ ,  $S3(0)$ ,  $S3't(0)$ ,  $q(0)$ ,  $q't(0)$ ;  
 КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ :=  $t(1)$ ,  $S4(S3k)$ ;  
 ПОКАЗАТЬ:= $M, P3, P4, Q$ ;  
 СРАВНИТЬ:= закон\_руху тіла\_3 ( $S3, Sc3$ ), закон\_руху тіла\_4\_5 ( $S4, Sc4, S5, Sc5$ ),  
 закони руху тіл\_1\_2 ( $F1, fi1, F2, fi2$ ), швидкості ЦВ тіл\_3 ( $Vc3, vc3$ ),  
 швидкості ЦВ тіл\_4\_5 ( $Vc4, vc4, Vc5, vc5$ ),  
 кутові швидкості тіл\_1\_2 ( $om1, omega1, om2, omega2$ ),  
 кутові пришвидшення тіл\_1\_2 ( $eps1, epsil1, eps2, epsil2$ ),  
 виконання енергетичних теорем руху ( $E, T, A, Tq, Aq$ ),  
 виконання теорем потужності руху ( $E', T', N, Tq', Nq$ );  
 РАСЧЕТ = УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ;  
 КОНЕЦ;

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка : підруч. / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 510 с.
2. Беломитцев А.С. Короткий курс теоретичної механіки. Динаміка : тексти лекцій / А.С. Беломитцев. – Х.: НТУ «ХП», 2006. – 128 с.
3. Андреев Ю.М. Практикум по теоретической и аналитической механике с применением ПЭВМ : учеб. пособ. / Ю.М. Андреев., Е.И. Дружинин, А.А. Ларин. – Х. : НТУ „ХПИ”, 2004. – 100 с.
4. Лавинский Д.В. Информационные технологии в аналитической механике : учеб. пособ. / Д.В. Лавинский, О.К. Морачковский. – Х. : НТУ «ХПИ», 2007. – 183 с.

## ЗМІСТ

|  |     |
|--|-----|
| Вступ . . . . .  | 3   |
| 1. Основні характеристики програмного комплексу «КіДиМ» . . . . .  | 4   |
| Питання для самоконтролю. . . . .  | 9   |
| 2. Кінематика та статика . . . . .   | 10  |
| 2.1. Кінематика точки. Теоретичний матеріал. . . . .   | 10  |
| Питання для самоконтролю. . . . .  | 13  |
| 2.2. Лабораторна робота №1. Комп'ютерне та аналітичне моделювання кінематики руху точки . . . . .                | 14  |
| 2.3. Кінематика тіл та системи тіл. Теоретичний матеріал. . . . .  | 17  |
| Питання для самоконтролю. . . . .  | 22  |
| 2.4. Лабораторна робота № 2 Комп'ютерне та аналітичне моделювання кінематики системи тіл . . . . .               | 23  |
| 2.5. Сили та реакції, рівновага тіл. Теоретичний матеріал. . . . .   | 28  |
| Питання для самоконтролю . . . . .   | 32  |
| 2.6. Лабораторна робота №3. Визначення реакцій в'язей тіл, на які діє плоска чи просторова системи сил . . . . . | 33  |
| 2.7. Рівновага складеної системи тіл. Теоретичний матеріал . . . . .   | 39  |
| Питання для самоконтролю . . . . .   | 41  |
| 2.8. Лабораторна робота № 4. Визначення реакцій в'язей складеної системи тіл . . . . .                           | 41  |
| 3. Динаміка . . . . .  | 45  |
| 3.1. Динаміка точки. Теоретичний матеріал. . . . .   | 45  |
| Питання для самоконтролю . . . . .   | 56  |
| 3.2. Лабораторна робота №1. Комп'ютерне та аналітичне моделювання динаміки точки . . . . .                       | 56  |
| 3.3. Динаміка матеріальної системи та твердого тіла. Теоретичний матеріал . . . . .                              | 59  |
| Питання для самоконтролю. . . . .  | 68  |
| 3.4. Лабораторна робота №2. Комп'ютерні та аналітичні засоби моделювання динаміки тіл . . . . .                  | 69  |
| 3.5. Динаміка механічної системи. Теоретичний матеріал. . . . .  | 77  |
| Питання для самоконтролю. . . . .  | 84  |
| 3.6. Лабораторна робота №3. Комп'ютерні та аналітичні засоби моделювання динаміки механічних систем . . . . .    | 85  |
| 3.7. Елементи аналітичної механіки. Теоретичний матеріал . . . . .   | 94  |
| Питання для самоконтролю . . . . .   | 96  |
| 3.8. Лабораторна робота № 4. Моделювання динаміки механічних систем методами аналітичної механіки . . . . .      | 97  |
| Список літератури . . . . .  | 102 |
| Зміст. . . . .   | 103 |

Навчальне видання

АНІЩЕНКО Галіна Оттівна  
МОРАЧКОВСЬКИЙ Олег Костянтинович

**КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ  
ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

Навчально-методичний посібник

для студентів бакалаврського напрямку 6.050503 - «Машинобудування»  
факультету «Інтегрованих технологій та хімічної техніки»

Роботу до друку рекомендував С.К. Шелковий  
В авторській редакції

План 2014р. п. 10  
Підп. до друку                      Формат 60х84 1/16.                      Папір офсетний.  
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум.-друк. арк. \_\_\_\_\_  
Наклад 100 прим. Зам. № \_\_\_\_\_. Ціна договірна.

---

—                      Видавничий центр «НТУ ХП».  
Свідectво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.  
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

---

—                      Друкарня «НТУ ХП». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21